

Chapitre 4 - Compléments sur les complexes - Exercices

Exercice n° 1

VRAI ou FAUX sur l'ensemble du chapitre.

- Les réels strictement négatifs admettent deux racines carrées.
- Soit $P(z) = az^2 + bz + c$ un polynôme du second degré à coefficients complexes. On note Δ son discriminant. Si $\Delta \neq 0$ alors P admet deux racines complexes qui sont $\frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $\frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- Un polynôme du second degré dont les coefficients sont réels a des racines réelles.
- Un polynôme du second degré dont les coefficients sont des complexes non réels a des racines complexes non réelles.
- Un polynôme du second degré à coefficients complexes peut toujours se factoriser en un produit de facteurs du premier degré.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, ω une racine n -ième de l'unité. $-\omega$ est aussi une racine n -ième de l'unité.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, ω une racine n -ième de l'unité. $\bar{\omega}$ est aussi une racine n -ième de l'unité.
- Dans le plan complexe $z \mapsto iz$ correspond à une rotation.
- On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est croissante lorsque les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont croissantes.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- Dans le plan complexe, on considère les points $A(2 + 3i)$, $B(1 + 6i)$ et $C(-1 + 2i)$. Calculer le complexe $\frac{c-a}{b-a}$. Que peut-on en déduire sur le triangle ABC ?
- On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto 3iz + 2 - i \end{cases}$
Interpréter f dans le plan complexe comme une succession de transformations élémentaires du plan.
- Trouver les racines carrées de $7 + 3i$.
- Résoudre les équations suivantes :
 $(E_1) : 3z^2 - z = 2$; $(E_2) : 3z^2 + 2 = z$; $(E_3) : z^2 + 2iz = -3$; $(E_4) : (1+i)z^2 + 2z + 3 = i$
- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^3 = -4 - 4i$.
- Donner la forme algébrique du complexe e^{3+i} .

Exercice n° 3

Est-il possible de trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ de sorte que $P(z) = (1 + \alpha)z^2 + iz - 2$ n'ait qu'une racine ? Si oui, préciser les différents cas possibles.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 4

Dans le plan complexe, on considère la rotation R de centre $A(1 - 4i)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit $M(z)$ un point du plan, quelle est l'affixe de $R(M)$?

Exercice n° 5

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$.

Exercice n° 6

Déterminer les racines carrées de $a = \sqrt{3} + i$ sous forme algébrique et exponentielle. En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{12})$.

Exercice n° 7

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^6 - 2z^3 \cos(\varphi) + 1 = 0$.

Exercice n° 8

Résoudre dans \mathbb{C} les équations $e^z = -2$; $e^z + e^{-z} = 1$ et $e^z + 2e^{-z} = i$.

Exercice n° 9

Résoudre $(z - 1)^5 = (z + 1)^5$.

Exercice n° 10

Soit $n \geq 2$, un entier, soit \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité. Que vaut $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$?

Exercice n° 11

On travaille dans le plan complexe. Soit, pour tout entier naturel n , les points $A_n(e^{i\frac{n\pi}{4}})$. On construit alors, la famille de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante : $M_0 = A_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_{n+1} est le projeté orthogonal de M_n sur la droite (OA_{n+1}) .

Déterminer l'affixe complexe de M_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3 Plus difficile...

Exercice n° 12

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{2k} (-1)^k 2^k$.

Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \frac{1}{2} ((1 + i\sqrt{2})^n + (1 - i\sqrt{2})^n)$.

Exercice n° 13

Soit n un entier naturel non nul, on note \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de 1. Les deux questions peuvent être traitées dans l'ordre de votre choix.

1. Calculer la somme $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} (1 + z)^n$.
2. Vérifier le résultat trouvé à la question précédente (ou conjecturez ce qu'il faut trouver si vous ne l'avez pas traitée) à l'aide de Python.

Exercice n° 14

Soit A, B, C trois points du plan complexe, d'affixes respectives a, b et c .

Prouver que ABC est un triangle équilatéral si, et seulement si, $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$.

Exercice n° 15

Soit a , un nombre complexe de module 1. Soit z_1, \dots, z_n les solutions complexes de l'équation $z^n = a$. Montrer que les points $M_1((1 + z_1)^n), \dots, M_n((1 + z_n)^n)$ sont alignés.