Chapitre 4 - Compléments sur les complexes - Exercices

Exercice n° 1

VRAI ou FAUX sur l'ensemble du chapitre.

a) Les réels strictement négatifs admettent deux racines carrées.

b) Soit $P(z) = az^2 + bz + c$ un polynôme du second degré à coefficients complexes. On note Δ son discriminant. Si $\Delta \neq 0$ alors P admet deux racines complexes qui sont $\dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $\dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

c) Un polynôme du second degré dont les coefficients sont réels a des racines réelles.

d) Un polynôme du second degré dont les coefficients sont des complexes non réels a des racines complexes non réelles.

e) Un polynôme du second degré à coefficients complexes peut toujours se factoriser en un produit de facteurs du premier degré.

f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, ω une racine $n-$ième de l'unité. $-\omega$ est aussi une racine $n-$ième de l'unité.

g) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, ω une racine $n-$ième de l'unité. $\overline{\omega}$ est aussi une racine $n-$ième de l'unité.

h) Dans le plan complexe $z \mapsto \mathrm{i}z$ correspond à une rotation.

i) On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est croissante lorsque les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont croissantes.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Dans le plan complexe, on considère les points $A(2+3\mathrm{i})$, $B(1+6\mathrm{i})$ et $C(-1+2\mathrm{i})$. Calculer le complexe $\frac{c-a}{b-a}$. Que peut-on en déduire sur le triangle ABC ?
2. On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & 3\mathrm{i}z + (2-\mathrm{i}) \end{array} \right.$
   Interpréter f dans le plan complexe comme une succession de tranformations élémentaires du plan.
3. Trouver les racines carrées de $7 + 3\mathrm{i}$.
4. Résoudre les équations suivantes :
   $$(E_1)\ :\ 3z^2 - z = 2 \quad ; \quad (E_2)\ :\ 3z^2 + 2 = z \quad ; \quad (E_3)\ :\ z^2 + 2\mathrm{i}z = -3 \quad ; \quad (E_4)\ :\ (1+\mathrm{i})z^2 + 2z + 3 = i$$
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -4 - 4\mathrm{i}$.
6. Donner la forme algébrique de $z = \mathrm{e}^{3+\mathrm{i}}$.

Exercice n° 3

Est-il possible de trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ de sorte que $P(z) = (1+\alpha)z^2 + iz - 2$ n'ait qu'une racine ?

2 Un peu plus dur

Exercice n° 4

Dans le plan complexe, on considère la rotation R de centre $A(1-4\mathrm{i})$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit $M(z)$ un point du plan, quelle est l'affixe de $R(M)$?

Exercice n° 5

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

Exercice n° 6

Déterminer les racines carrées de $a = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ sous forme algébrique et exponentielle. En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{12})$.

Exercice n° 7

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 - 2z^3 \cos\varphi + 1 = 0$.

Exercice n° 8

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $\mathrm{e}^z = -2$; $\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 1$ et $\mathrm{e}^z + 2\mathrm{e}^{-z} = \mathrm{i}$.

Exercice n° 9

Résoudre $(z-1)^5 = (z+1)^5$.

Exercice n° 10

Soit $n \leq 2$, un entier, soit $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Que vaut $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$?

Exercice n° 11

On travaille dans le plan complexe. Soit, pour tout entier naturel n, les points $A_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}})$. On construit alors, la famille de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante : $M_0 = A_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_{n+1} est le projeté orthogonal de M_n sur la droite (OA_{n+1}).
Déterminer l'affixe complexe de M_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3 Plus difficile...

Exercice n° 12

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} (-1)^k 2^k$.
Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \frac{1}{2}\left((1+i\sqrt{2})^n + (1-i\sqrt{2})^n\right)$.

Exercice n° 13

Soit n un entier naturel non nul, on note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de 1. Les deux questions peuvent être traitées dans l'ordre de votre choix.

1. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{z \in \mathbb{U}_n} (1+z)^n$.
2. Vérifier le résultat trouvé à la question précédente (ou conjecturez ce qu'il faut trouver si vous ne l'avez pas traitée) à l'aide de Python.

Exercice n° 14

Soit A, B, C trois points du plan complexe, d'affixes respectives a, b et c.
Prouver que ABC est un triangle équilatéral si, et seulement si, $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$.