

Correction des exercices du chapitre 4

1 Applications directes du cours

Exercice n° 1

- On a $\frac{c-a}{b-a} = \frac{-3-i}{-1+3i} = \frac{(-3-i)(-1-3i)}{10} = i$.
— $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} = \text{Arg}\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}$ donc ABC est rectangle en A ;
— $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1 \iff \frac{AC}{AB} = 1$ donc ABC est isocèle en A .
Finalement, le triangle ABC est rectangle isocèle en A .
- f correspond à la composition : $z \mapsto iz \mapsto 3iz \mapsto 3iz + (2-i)$.
D'un point de vue géométrique, on a successivement :
— la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
— l'homothétie de centre O et de rapport 3 ;
— la translation de vecteur $\vec{w}(2-i)$.
- On peut raisonner avec la forme algébrique ou avec la forme exponentielle. Après calculs, on trouve que les racines carrées de $7+3i$ sont : $\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{58}+7}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{58}-7}{2}} \right) = \pm \sqrt{\sqrt{58}} e^{i\frac{1}{2} \arccos(\frac{7}{\sqrt{58}})}$.
- $\forall z \in \mathbb{C}, (E_1) \iff (z-1)(3z+2) \iff z \in \{1; -\frac{2}{3}\}$.
— $\forall z \in \mathbb{C}, (E_2) \iff z^2 - z + 2 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = -7$, elle admet donc deux racines complexes : $\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$.
— $\forall z \in \mathbb{C}, (E_3) \iff z^2 + 2iz + 3 = 0 \iff (z-i)(z+3i) = 0 \iff z \in \{i; -3i\}$.
— $\forall z \in \mathbb{C}, (E_4) \iff (1+i)z^2 + 2z + 3-i = 0$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 4(1+i)(3-i) = -12 - 8i$, l'équation admet donc deux solutions : $\frac{-2-\delta}{2(1+i)}$ et $\frac{-2+\delta}{2(1+i)}$ où δ désigne une racine carrée de Δ .
On a : $\Delta = -4(3+2i) = -4\sqrt{13}e^{i\arccos(\frac{3}{\sqrt{13}})}$ et donc on peut prendre $\delta = 2i\sqrt{\sqrt{13}}e^{i\frac{1}{2}\arccos(\frac{3}{\sqrt{13}})}$
- Soit $z \in \mathbb{C}$ notons $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = |z|$ et $\theta = \text{Arg}(z)$. On a :

$$z^3 = -4 - 4i \iff \rho^3 e^{i3\theta} = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} \iff \begin{cases} \rho^3 = 4\sqrt{2} \\ 3\theta = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[3]{4\sqrt{2}} \\ \theta = -\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

L'équation admet donc pour solution :

$$\left\{ \sqrt[3]{4\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{3}} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \sqrt[3]{4\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} ; \sqrt[3]{4\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}} ; \sqrt[3]{4\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}} \right\}$$

6. $e^{3+i} = e^3 e^i = e^3 \cos(1) + ie^3 \sin(1)$.

Exercice n° 2

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On considère le polynôme $P(z) = (1+\alpha)z^2 + iz - 2$.

- Si $\alpha = -1$ alors $P(z)$ est de degré 1, il a donc une unique racine qui vaut $-2i$.
- Si $\alpha \neq -1$ alors $P(z)$ est de degré 2 et son discriminant est $\Delta = 7 + 8\alpha$. P admet une unique racine si, et seulement si, $\Delta = 0 \iff \alpha = -\frac{7}{8}$.

Finalement, il y a deux valeurs de α telles que $P(z) = 0$ ait une unique solution : -1 et $-\frac{7}{8}$.

2 Vrai ou faux sur l'ensemble du chapitre

- Vrai. $x \in \mathbb{R}^*$ admet pour racines carrées $i\sqrt{-x}$ et $-i\sqrt{-x}$ (qui sont distincts puisque $x \neq 0$).
- Faux. La formule $\frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ s'applique si, et seulement si, $\Delta \in \mathbb{R}^-$ car alors $i\sqrt{|\Delta|}$ est une racine carrée de Δ . Comme contre-exemple on peut prendre $P(z) = z^2 - 1$ qui admet comme racines 1 et -1 .
- Faux. Contre-exemple : $P = X^2 + 1$ est à coefficients réels mais ses racines sont i et $-i$.
- Faux. Contre-exemple : $P = i(X-1)(X+1)$ est à coefficients non réels mais ses racines sont -1 et 1 .
- Vrai. Un polynôme du second degré à coefficients complexes admet toujours une racine α et on peut donc le factoriser par $(X - \alpha)$, l'autre facteur sera également un polynôme de degré 1.
C'est un cas particulier du théorème de Gauss que l'on verra dans le chapitre dédié aux polynômes.

- f) Faux. Contre-exemple pour $n = 3$: $\omega = 1$ une racine n -ième de l'unité mais ce n'est pas le cas de $-\omega = -1$.
- g) Vrai. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, ω une racine n -ième de l'unité. $\overline{\omega}^n = \overline{\omega^n} = 1$ donc $-\omega$ est aussi une racine n -ième de l'unité.
- h) Vrai. La multiplication par i envoie $A(|z|e^{i\theta})$ sur $B(|z|e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})})$ et B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- i) Faux. Il n'y a pas d'ordre dans $\mathbb{C}$ et donc pas de notion de variations pour les fonctions à valeurs complexes.

3 Un peu plus dur

Exercice n° 3

Dans le plan complexe, on considère la rotation R de centre $A(1 - 4i)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
 $R(M)$ est le point du plan tel que le vecteur $\overrightarrow{AR(M)}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{AM}$. Du point de vue des affixes complexes, si on note z l'affixe de M et z' celle de $R(M)$ on a :

$$z' - (1 - 4i) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - (1 - 4i)) \iff z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - (1 - 4i)) + 1 - 4i$$

Exercice n° 4

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) \\ &= \Re \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{ix})^k \right) \\ &= \Re \left((1 + e^{ix})^n \right) \\ &= 2^n \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) \right)^n \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \end{aligned}$$

Exercice n° 5

- Avec la forme exponentielle : $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et donc les racines carrées de a sont $\pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.
- Avec la forme algébrique : soit $\delta = x + iy$ une racine carrée de a , avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\delta^2 = a \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \sqrt{3} & (1) \\ 2xy = 1 & (2) \end{cases} \quad \text{et} \quad |\delta|^2 = |a| \iff x^2 + y^2 = 2 : (3)$$

En soustrayant (1) et (3) on obtient $x = \pm\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$ puis, avec (2) on a $y = \frac{1}{2x}$.

D'après ce qu'on a vu, les racines carrées de a ont pour parties réelles $\pm\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{12}) = \pm\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

$\frac{\pi}{12} \in [0; \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(\frac{\pi}{12}) \geq 0$ et on conclut $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Exercice n° 6

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$.

On pose $X = z^3$ et l'équation (E) : $z^6 - 2z^3 \cos(\varphi) + 1 = 0$ devient $X^2 - 2X \cos(\varphi) + 1 = 0$: (E') .
 (E') a pour discriminant :

$$\Delta = 4\cos^2(\varphi) - 4 = 4(\cos^2(\varphi) - 1) = -4\sin^2(\varphi) = (2i\sin(\varphi))^2$$

On en déduit que les solutions de (E') sont $\frac{2\cos(\varphi) + 2i\sin(\varphi)}{2} = e^{i\varphi}$ et $e^{-i\varphi}$.

On repasse à z qui doit vérifier $z^3 = e^{i\varphi}$ ou $z^3 = e^{-i\varphi}$ ce qui donne 6 solutions :

$$e^{i\frac{\varphi}{3}}, e^{i\frac{\varphi+2\pi}{3}}, e^{i\frac{\varphi+4\pi}{3}}, e^{-i\frac{\varphi}{3}}, e^{-i\frac{\varphi+2\pi}{3}}, e^{-i\frac{\varphi+4\pi}{3}}$$

Remarque : il y a une petite erreur ci-dessus. Saurez-vous la repérer et la corriger ?

Exercice n° 7

Soit $z = a + ib$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} - e^z = -2 &\iff e^a e^{ib} = 2e^{i\pi} \iff \begin{cases} e^a = 2 \\ b = \pi + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} a = \ln(2) \\ b = \pi + 2k\pi \end{cases} \\ \text{Finalement, l'ensemble des solutions est } &\{\ln(2) + i(\pi + 2k\pi), / k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Exercice n° 8

$z = 1$ n'est pas solution de $(z - 1)^5 = (z + 1)^5$.

Pour $z \neq 1$ on a : $(z - 1)^5 = (z + 1)^5 \iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1 \iff \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U}_5$.

Avec $\mathbb{U}_5$ l'ensemble des racines cinquièmes de l'unité, c'est-à-dire $\mathbb{U}_5 = \{\omega ; \omega^2 ; \omega^3 ; \omega^4 ; 1\}$ avec $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.
Pour $t \in \mathbb{U}_5$, on a $\frac{z+1}{z-1} = t \iff z + 1 = zt - t \iff z(t - 1) = 1 + t$ et donc il y a deux possibilités :

- Si $t = 1$, l'équation n'a pas de solution ;
- Sinon, elle admet pour unique solution $z = \frac{1+t}{t-1}$.

Finalement, $(z - 1)^5 = (z + 1)^5$ admet quatre solutions : $\frac{1+\omega}{\omega-1}, \frac{1+\omega^2}{\omega^2-1}, \frac{1+\omega^3}{\omega^3-1}$ et $\frac{1+\omega^4}{\omega^4-1}$.

Exercice n° 9

Soit $n \geq 2$. Notons $\gamma = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. On a :

$$\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \prod_{k=1}^n \gamma^k = \prod_{k=0}^{n-1} \gamma^k = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k} = e^{i(n-1)\pi} = (e^{i\pi})^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Exercice n° 10

Évidemment, il faut faire une figure.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons z_n l'affixe complexe de M_n .

On a $M_n \in [O; A_n]$ et donc $\text{Arg}(z_n) = \text{Arg}(e^{i\frac{n\pi}{4}}) \equiv \frac{n\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

Les triangles $OM_{n+1}M_n$ sont rectangles isocèles en M_{n+1} , on en déduit que :

$$OM_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} OM_n \iff |z_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_n|.$$

Autrement dit, la suite $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Comme son premier terme est $|z_0| = 1$ on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, |z_n| = \frac{1}{(\sqrt{2})^n} = 2^{-\frac{n}{2}}$. Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = 2^{-\frac{n}{2}} e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

4 Plus difficile...

Exercice n° 11

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{2})^n + (1 - i\sqrt{2})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (i\sqrt{2})^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-i\sqrt{2})^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt{2}i)^k (1 + (-1)^k) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (\sqrt{2}i)^{2k} \times 2 \end{aligned}$$

En se souvenant que, par convention, lorsque $k > n$ on a $\binom{n}{k} = 0$ il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \left((1 + i\sqrt{2})^n + (1 - i\sqrt{2})^n \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{2k} (-1)^k 2^k.$$

Exercice n° 12

Soit n un entier naturel non nul

1. Notons $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. On a

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} (1+z)^n = \sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \omega^{kj} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj} \right).$$

La somme entre parenthèses est géométrique. On a :

- Pour $0 < j < n$ on a $\omega^j \neq 1$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj} = \frac{1 - (\omega^j)^n}{1 - \omega^j} = 0$;
- pour $j \in \{0; n\}$, $\omega^j = 1$ et donc $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj} = n$.

On en déduit que $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} (1+z)^n = 2n$.

2. Le code ci-dessous définit une fonction qui, pour une valeur de n , renvoie le calcul de la somme :

```
from math import cos, sin, pi

def ex13(n) :
    omega=cos(2*pi/n)+1j*sin(2*pi/n)
    somme=0
    for k in range(n) :
        somme=somme+(1+omega**k)**n
    return(somme)
```

On teste avec plusieurs valeurs :

```
In [13]: ex13(5)
Out[13]: (10-6.245004513516506e-17j)

In [14]: ex13(6)
Out[14]: (12.000000000000007+6.300515664747763e-14j)

In [15]: ex13(28)
Out[15]: (55.99999928474426+1.2992637692597754e-06j)
```

On conjecture que la somme vaut $2n$.

Exercice n° 13

Soit A, B, C trois points distincts du plan complexe. Le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si, l'angle $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \pm \frac{\pi}{3}$ et $AC = AB$, autrement dit si, et seulement si, $\frac{b-a}{c-a} = e^{\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{b-a}{c-a} = e^{\frac{\pi}{3}}$.

On réunit ces deux cas en écrivant :

ABC est équilatéral si, et seulement si, $\frac{b-a}{c-a} = \frac{c-b}{a-b}$. En multipliant cette équation par $(c-a)(a-b)$ on obtient le résultat voulu.

Exercice n° 14

Soit a , un nombre complexe de module 1, il existe $\theta \in]-\pi; \pi]$ tel que $a = e^{i\theta}$. Notons $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Les solutions complexes de l'équation $z^n = a$ sont de la forme $z_k = \omega^k e^{i\frac{\theta}{n}}$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, (1+z_k)^n &= (1 + e^{i\frac{2\pi+\theta}{n}})^n \\ &= \left(e^{i\frac{\pi+\frac{\theta}{2}}{n}} 2 \cos\left(\frac{\pi+\frac{\theta}{2}}{n}\right) \right)^n \\ &= 2^n \cos^n\left(\frac{\pi+\frac{\theta}{2}}{n}\right) e^{i(\pi+\frac{\theta}{2})} \end{aligned}$$

Ces complexes sont non-nuls, ils ont tous le même argument et sont donc alignés sur la même demi-droite qui passe par l'origine.