Correction des exercices du chapitre 4

Exercice n° 1

a) Vrai. $x \in \mathbb{R}^{-*}$ admet pour racines carrées $\mathrm{i}\sqrt{-x}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{-x}$ (qui sont distincts puisque $x \neq 0$.

b) Faux. La formule $\dfrac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ s'applique si, et seulement si, $\Delta \in \mathbb{R}^-$ car alors $\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}$ est une racine carrée de Δ. Comme contre-exemple on peut prendre $P(z) = z^2 - 1$ qui admet comme racines 1 et -1.

c) Faux. Contre-exemple : $P = X^2 + 1$ est à coefficients réels mais ses racines sont i et $-$i.

d) Faux. Contre-exemple : $P = \mathrm{i}(X-1)(X+1)$ est à coefficients non réels mais ses racines sont -1 et 1.

e) Vrai. Un polynôme du second degré à coefficients complexes admet toujours une racine α et on peut donc le factoriser par $(X - \alpha)$, l'autre facteur sera également un polynôme de degré 1. *C'est un cas particulier du théorème de Gauss que l'on verra dans le chapitre dédié aux polynômes.*

f) Faux. Contre-exemple pour $n = 3$: $\omega = 1$ une racine $n-$ième de l'unité mais ce n'est pas le cas de $-\omega = -1$.

g) Vrai. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, ω une racine $n-$ième de l'unité. $\overline{omega}^n = \overline{\omega^n} = 1$ donc $-\omega$ est aussi une racine $n-$ième de l'unité.

h) Vrai. La multiplication par i envoie $A(|z|\mathrm{e}^{i\theta})$ sur $B(|z|\mathrm{e}^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ et B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

i) Faux. Il n'y a pas d'ordre dans $\mathbb{C}$ et donc pas de notion de variations pour les fonctions à valeurs complexes.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

1. On a $\frac{c-a}{b-a} = \frac{-3-\mathrm{i}}{-1+3\mathrm{i}} = \frac{(-3-\mathrm{i})(-1-3\mathrm{i})}{10} = \mathrm{i}$.
   — $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} = \mathrm{Arg}(\frac{c-a}{b-a}) = \frac{\pi}{2}$ donc ABC est rectangle en A ;
   — $|\frac{c-a}{b-a}| = 1 \Longleftrightarrow \frac{AC}{AB} = 1$ donc ABC est isocèle en A.
   Finalement, le triangle ABC est rectangle isocèle en A.
2. f correspond à la composition : $z \longmapsto \mathrm{i}z \longmapsto 3\mathrm{i}z \longmapsto 3\mathrm{i}z + (2-\mathrm{i})$.
   D'un point de vue géométrique, on a successivement :
   — la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
   — l'homothétie de centre O et de rapport 3 ;
   — la translation de vecteur $\vec{w}(2-\mathrm{i})$.
3. On peut raisonner avec la forme algébrique ou avec la forme exponentielle. Après calculs, on trouve que les racines carrées de $7+3\mathrm{i}$ sont : $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{58}+7}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{58}-7}{2}}\right) = \pm\sqrt{\sqrt{58}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\arccos(\frac{7}{\sqrt{58}})}$.
4. — $\forall z \in \mathbb{C},\ (E_1) \Longleftrightarrow (z-1)(3z+2) \Longleftrightarrow z \in \{1; -\frac{2}{3}\}$.
   — $\forall z \in \mathbb{C},\ (E_2) \Longleftrightarrow z^2 - z + 2 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = -7$, elle admet donc deux racines complexes : $\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$.
   — $\forall z \in \mathbb{C},\ (E_3) \Longleftrightarrow z^2 + 2\mathrm{i}z + 3 = 0 \Longleftrightarrow (z-\mathrm{i})(z+3\mathrm{i}) = 0 \Longleftrightarrow z \in \{\mathrm{i}; -3\mathrm{i}\}$.
   — $\forall z \in \mathbb{C},\ (E_4) \Longleftrightarrow (1+\mathrm{i})z^2 + 2z + 3 - \mathrm{i} = 0$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 4(1+\mathrm{i})(3-\mathrm{i}) = -12-8\mathrm{i}$, l'équation admet donc deux solutions : $\frac{-2-\delta}{2(1+\mathrm{i})}$ et $\frac{-2+\delta}{2(1+\mathrm{i})}$ ou δ désigne une racine carrée de Δ.
   On a : $\Delta = -4(3+2\mathrm{i}) = -4\sqrt{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arccos(\frac{3}{\sqrt{13}})}$ et donc on peut prendre $\delta = 2\mathrm{i}\sqrt{\sqrt{13}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\arccos(\frac{3}{\sqrt{13}})}$

5. Soit $z \in \mathbb{C}$ notons $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = |z|$ et $\theta = \mathrm{Arg}(z)$. On a :

$$z^3 = -4-4i \iff \rho^3 e^{i3\theta} = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} \iff \left\{ \begin{array}{l} \rho^3 = 4\sqrt{2} \\ 3\theta = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt[3]{4\sqrt{2}} \\ \theta = -\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3} \end{array} \right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

L'équation admet donc pour solution :

$$\left\{ \sqrt[3]{4\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{3}} \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \sqrt[3]{4\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} \ ; \ \sqrt[3]{4\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}} \ ; \ \sqrt[3]{4\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}} \right\}$$

6. $e^{3+i} = e^3 e^i = e^3\cos(1) + ie^3\sin(1)$.

Exercice n° 3

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On consdière le polynôme $P(z) = (1+\alpha)z^2 + iz - 2$.

- Si $\alpha = -1$ alors $P(z)$ est de degré 1, il a donc une unique racine qui vaut $-2i$.
- Si $\alpha \neq -1$ alors $P(z)$ est de degré 2 et son discriminant est $\Delta = 7 + 8\alpha$. P admet une unique racine si, et seulement si, $\Delta = 0 \iff \alpha = -\frac{7}{8}$.

Finalement, il y a deux valeurs de α telles que $P(z) = 0$ ait une unique solution : -1 et $-\frac{7}{8}$.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 4

Dans le plan complexe, on considère la rotation R de centre $A(1-4i)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
$R(M)$ est le point du plan tel que le vecteur $\overrightarrow{AR(M)}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{AM}$. Du point de vue des affixes complexes, si on note z l'affixe de M et z' celle de $R(M)$ on a :

$$z' - (1-4i) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - (1-4i)) \iff z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - (1-4i)) + 1 - 4i$$

Exercice n° 5

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ix}\right)^k \right) \\ &= \mathrm{Re}\left((1+e^{ix})^n\right) \\ &= 2^n \left(\cos(\frac{x}{2})\right)^n \cos(\frac{nx}{2}) \end{aligned}$$

Exercice n° 6

- Avec la forme exponentielle : $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et donc les racines carrées de a sont $\pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.
- Avec la forme algébrique : soit $\delta = x + iy$ une racine carrée de a, avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\delta^2 = a \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = \sqrt{3} \ (1) \\ 2xy = 1 \ : (2) \end{array} \right. \qquad \text{et} \quad |\delta|^2 = |a| \iff x^2 + y^2 = 2 \ : (3)$$

En soustrayant (1) et (3) on obtient $x = \pm\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$ puis, avec (2) on a $y = \frac{1}{2x}$.

D'après ce qu'on a vu, les racines carrées de a ont pour parties réelles $\pm\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{12}) = \pm\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$.
$\frac{\pi}{12} \in [0;\frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(\frac{\pi}{12}) \geq 0$ et on conclut $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Exercice nº 7

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$.
On pose $X = z^3$ et l'équation (E) : $z^6 - 2z^3\cos(\varphi) + 1 = 0$ devient $X^2 - 2X\cos(\varphi) + 1 = 0$: (E').
(E') a pour discriminant :

$$\Delta = 4\cos^2(\varphi) - 4 = 4(\cos^2(\varphi) - 1) = -4\sin^2(\varphi) = (2\mathrm{i}\sin(\varphi))^2$$

On en déduit que les solutions de (E') sont $\frac{2\cos(\varphi)+2\mathrm{i}\sin(\varphi)}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$.

On repasse à z qui doit vérifier $z^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ ou $z^3 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ ce qui donne 6 solutions :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{3}} \ , \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi+2\pi}{3}} \ , \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi+4\pi}{3}} \ , \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{3}} \ , \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi+2\pi}{3}} \ , \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi+4\pi}{3}}$$

Remarque : il y a une petite erreur ci-dessus. Saurez-vous la repérer et la corriger ?

Exercice nº 8

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$. On a :
— $\mathrm{e}^z = -2 \iff \mathrm{e}^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \iff \begin{cases} \mathrm{e}^a = 2 \\ b = \pi + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} a = \ln(2) \\ b = \pi + 2k\pi \end{cases}$
Finalement, l'ensemble des solutions est $\{\ln(2) + \mathrm{i}(\pi + 2k\pi), \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice nº 9

$z = 1$ n'est pas solution de $(z-1)^5 = (z+1)^5$.
Pour $z \neq 1$ on a : $(z-1)^5 = (z+1)^5 \iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1 \iff \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U}_5$.
Avec $\mathbb{U}_5$ l'ensemble des racines cinquièmes de l'unité, c'est-à-dire $\mathbb{U}_5 = \{\omega \ ; \ \omega^2 \ ; \ \omega^3 \ ; \ \omega^4 \ ; \ 1\}$ avec $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$.
Pour $t \in \mathbb{U}_5$, on a $\frac{z+1}{z-1} = t \iff z + 1 = zt - t \iff z(t-1) = 1 + t$ et donc il y a deux possibilités :
— Si $t = 1$, l'équation n'a pas de solution ;
— Sinon, elle admet pour unique solution $z = \frac{1+t}{t-1}$.
Finalement, $(z-1)^5 = (z+1)^5$ admet quatre solutions : $\frac{1+\omega}{\omega-1}$, $\frac{1+\omega^2}{\omega^2-1}$, $\frac{1+\omega^3}{\omega^3-1}$ et $\frac{1+\omega^4}{\omega^4-1}$.

Exercice nº 10

Soit $n \geq 2$. Notons $\gamma = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$. On a :

$$\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega = \prod_{k=1}^{n} \gamma^k = \prod_{k=0}^{n-1} \gamma^k = \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\pi} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Exercice nº 11

Évidemment, il faut faire une figure.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons z_n l'affixe complexe de M_n.
On a $M_n \in [O;A_n)$ et donc $\mathrm{Arg}(z_n) = \mathrm{Arg}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}) \equiv \frac{n\pi}{4} \ \mathrm{mod}(2\pi)$.
Les triangles $OM_{n+1}M_n$ sont rectangles isocèles en M_{n+1}, on en déduit que :

$$OM_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}OM_n \iff |z_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{2}}|z_n|.$$

Autrement dit, la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Comme son premier terme est $|z_0| = 1$ on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \ |z_n| = \frac{1}{(\sqrt{2})^n} = 2^{-\frac{n}{2}}$. Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}, \ z_n = 2^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}$.

3 Plus difficile...

Exercice n° 12

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i}\sqrt{2})^n + (1-\mathrm{i}\sqrt{2})^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\mathrm{i}\sqrt{2})^k \; + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\mathrm{i}\sqrt{2})^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt{2}\mathrm{i})^k(1+(-1)^k) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n}{2k}(\sqrt{2}\mathrm{i})^k \times 2\end{aligned}$$

En se souvenant que, par convention, lorsque $k > n$ on a $\binom{n}{k} = 0$ il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2}\left((1+\mathrm{i}\sqrt{2})^n + (1-\mathrm{i}\sqrt{2})^n\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}(-1)^k 2^k.$$

Exercice n° 13

Soit n un entier naturel non nul

1. Notons $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$. On a

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n}(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\omega^{kj} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kj}\right).$$

   La somme entre parenthèses est géométrique. On a :

   — Pour $0 < j < n$ on a $\omega^j \neq 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kj} = \frac{1-(\omega^j)^n}{1-\omega^j} = 0$;

   — pour $j \in \{0; n\}$, $\omega^j = 1$ et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kj} = n$.

   On en déduit que $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{U}_n}(1+z)^n = 2n$.

2. Le code ci-dessous définit une fonction qui, pour une valeur de n, renvoie le calcul de la somme :

```
from math import cos, sin, pi

def ex13(n) :
    omega=cos(2*pi/n)+1j*sin(2*pi/n)
    somme=0
    for k in range (n) :
        somme=somme+(1+omega**k)**n
    return(somme)
```

   On teste avec plusieurs valeurs :

```
In [13]: ex13(5)
Out[13]: (10-6.245004513516506e-17j)

In [14]: ex13(6)
Out[14]: (12.000000000000007+6.300515664747763e-14j)

In [15]: ex13(28)
Out[15]: (55.99999928474426+1.2992637692597754e-06j)
```

   On conjecture que la somme vaut $2n$.

Exercice n° 14

Soit A, B, C trois points distincts du plan complexe. Le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si, l'angle $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \pm\frac{\pi}{3}$ et $AC = AB$, autrement dit si, et seulement si, $\frac{b-a}{c-a} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{b-a}{c-a} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}$.
On réunit ces deux cas en écrivant :
ABC est équilatéral si, et seulement si, $\frac{b-a}{c-a} = \frac{c-b}{a-b}$. En multipliant cette équation par $(c-a)(a-b)$ on obtient le résultat voulu.

Exercice n° 15

Soit a, un nombre complexe de module 1, il existe $\theta \in]-\pi;\pi]$ tel que $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Notons $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.
Les solutions complexes de l'équation $z^n = a$ sont de la forme $z_k = \omega^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}$ pour $k \in [\![1;n]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1;n]\!],\ (1+z_k)^n &= (1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi+\theta}{n}})^n \\ &= \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+\frac{\theta}{2}}{n}} 2\cos(\frac{\pi+\frac{\theta}{2}}{n})\right)^n \\ &= 2^n \cos^n(\frac{\pi+\frac{\theta}{2}}{n})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+\frac{\theta}{2})}\end{aligned}$$

Ces complexes sont non-nuls, ils ont tous le même argument et sont donc alignés sur la même demi-droite qui passe par l'origine.