Correction des exercices du chapitre 5

Exercice n° 1

VRAI ou FAUX sur l'ensemble du chapitre.

a) Faux. Une fonction ayant une primitive en admet une infinité.

b) Faux. Contre-exemple : $f(x) = x + \frac{1}{2}$ vérifie $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$ et n'est pas nulle sur $[0;1]$.

c) Vrai. Par exemple, la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq \frac{1}{2} \\ -1 \text{ si } x < \frac{1}{2} \end{cases}$ ne s'annule jamais sur $[0;1]$ mais vérifie $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$.

d) Faux. Contre-exemple : $f(x) = 1$ est strictement positive et $\int_1^0 f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x < 0$.

e) Vrai. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une fonction continue f telle que $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = 0$ et telle que f ne soit pas nulle sur $[0;1]$. Cela signifie qu'il existe $a \in]0;1[$ tel que $f(a) \neq 0$. Par continuité, il existe un intervalle $]a-h;a+h[\subset [0;1]$ tel que f ne s'annule pas sur $]a-h;a+h[$. On a alors $\int_0^1 f(x)^2 \ \mathrm{d}x \geq \int_{a-h}^{a+h} f(x)^2 \ \mathrm{d}x \geq 2h\min\{f(x),\ a-h \leq x \leq a+h\}$.

f) Vrai. L'équation $y' = 2x + 2$ convient.

g) Vrai. $y' = y$ a pour solution $\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^x \ , \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $\lambda \mathrm{e}^x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ selon le signe de λ.
Finalement $f(x) = 0$ est la seule solution de $y' = y$qui vérifie $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

h) Vrai. Reprendre le cours si ça n'est pas clair.

i) Faux. On a toujours une infinité de solutions si l'on n'a pas de condition initiale, une seule lorsqu'on a des conditions initiales.

j) Vrai. Supposons que deux solutions d'une même EDO1 aient des courbes qui se croisent au point d'abscisse x_0. Les fonctions sont de la forme $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-A(x)}$ et $g(x) = \mu \mathrm{e}^{-A(x)}$. On a :

$$f(x_0) = g(x_0) \iff \lambda \mathrm{e}^{-A(x_0)} = \mu \mathrm{e}^{-A(x_0)} \iff \lambda = \mu \iff f = g.$$

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

1.

fonction $f(x) =$	$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{x}$	x^α $(\alpha \neq 1)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
primitive $F(x) =$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\arctan(x)$	$2\sqrt{x}$
Intervalle	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{+*}$	

u est systématiquement une fonction dérivable sur son domaine de définition $\mathcal{D}_u$. Pour certains cas, il y a des contraintes supplémentaires :

$f =$	uu'	$u'u^n$	$\frac{u'}{u}$	$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$u'\sin(u)$
$F =$	$\frac{1}{2}u^2$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$\ln\lvert u\rvert$ u ne s'annule pas	$\frac{1}{u}$ u ne s'annule pas	$2\sqrt{u}$ u ne s'annule pas	$-\cos(u)$

2.
- $y' = 2x + \mathrm{e}^x$ a pour solutions les fonctions de la forme $f(x) = x^2 + \mathrm{e}^x + k$ où $k \in \mathbb{R}$. On travaille sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
- $y' = \frac{1-x}{x^2} \iff y' = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ a pour solutions les fonctions de la forme $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\lvert x\rvert + k$ où $k \in \mathbb{R}$. On travaille sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.
- $7y' - \frac{1}{\sqrt{x}} = 3 \iff y' = \frac{1}{7\sqrt{x}} + \frac{3}{7}$ a pour solutions les fonctions de la forme $f(x) = \frac{2}{7}\sqrt{x} + \frac{3}{7}x + k$ où $k \in \mathbb{R}$. On travaille sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

- $y' = t - t^2 + t^6$ a pour solutions les fonctions de la forme $f(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{7}t^7 + k$ où $k \in \mathbb{R}$. On travaille sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
- $y' = (5x+2)^7$ a pour solutions les fonctions de la forme $f(x) = \frac{1}{40}(5x+2)^8 + k$ où $k \in \mathbb{R}$. On travaille sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
- $y' = \tan(x) \iff y' = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ a pour solutions les fonctions de la forme $f(x) = -\ln|\cos(x)| + k$ où $k \in \mathbb{R}$. On travaille sur un intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi[$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

3. La primitive de ln qui s'annule en 1 est la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \ln(t)\ \mathrm{d}t$ où $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

   Calculons cette intégrale par parties, en posant $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \ln(t) \end{cases}$. On a alors $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$ et :

$$\int_1^x \ln(t)\ \mathrm{d}t \ = \ [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x 1\ \mathrm{d}t \ = \ x\ln(x) - x + 1$$

4. La fonction $x \mapsto x^2\mathrm{e}^x$ est définie, continue et strictement positive sur $[1;\mathrm{e}]$, on a donc :

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^2\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x > 0 \iff \int_{\mathrm{e}}^1 x^2\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x < 0.$$

5.
   - $\int_{-2}^1 3x^2 - x + 1\ \mathrm{d}x = \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-2}^1 = \frac{27}{2}$
   - $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(2t + \frac{\pi}{2})\ \mathrm{d}t = []_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{4}$
   - $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

6.
   - $f(x) = x\cos(x)$ est une fonction impaire donc $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\ \mathrm{d}x = 0$.
   - On procède en faisant deux intégations par parties successives :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)\ \mathrm{d}x &= \underbrace{\left[x^2\sin(x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{=\frac{\pi^2}{2}} - 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^2}{2} - 2\left(-[x\cos(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ \mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{\pi^2}{2} - 4\end{aligned}$$

7. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}x} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \frac{1}{\mathrm{e}^x}}$. On pose $\phi(t) = \ln(t)$ et on obtient :

$$I = 2\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \times \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = 2\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\left[\mathrm{Arctan}(t)\right]_1^{\mathrm{e}} = 2\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}) - \frac{\pi}{2}$$

8. $x^2y' = 3y - \mathrm{e}^t \Leftrightarrow x^2y' - 3y = -\mathrm{e}^t$ est d'ordre 1, linéaire.

   $(y - y')(2y+1) = t \Leftrightarrow -2y'y - y' + 2y^2 + y = t$ est d'ordre 2, non linéaire.

   $\cos(t)y'' = y - 1 \Leftrightarrow y''\cos(t) - y = -1$ est d'ordre 2, linéaire.

   $y'' = -y \Leftrightarrow y'' + y = 0$ est d'ordre 2, linéaire à coefficients constants.

9.
   - $y' + x^2y = 0$. On travaille sur $\mathbb{R}$, on pose $a(x) = x^2$ et on prend $A(x) = \frac{1}{3}x^3$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3}\ /\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   - $y' = \sqrt{x}y \Leftrightarrow y' - \sqrt{x}y = 0$. On travaille sur $\mathbb{R}^{+*}$, on pose $a(x) = -\sqrt{x}$ et $A(x) = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}\ /\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

- $y'\cos(x) - y = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{\cos(x)}y = 0$. On travaille sur un intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi[$ (où $k \in \mathbb{Z}$), on pose $a(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ et $A(x) = \int_0^x a(t)\ \mathrm{d}t$.
  L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(x)}\ /\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

10. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   - On travaille sur $\mathbb{R}$. $y' - 5y = t + 3$ a pour équation homogène $y' - 5y = 0$ dont les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda \mathrm{e}^{5t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
     On cherche une solution particulière affine, de la forme $f(t) = at + b$. On a :
     $$(f \text{ est solution}) \Longleftrightarrow f' - 5f = t + 3 \Longleftrightarrow a - 5(at + b) = t + 3 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\frac{1}{5} \\ b = -\frac{16}{25}\end{array}\right.$$
     Finalement, $f(t) = -\frac{1}{5}t + \frac{16}{25}$ est solution particulière et l'ensemble des solutions est
     $$\mathcal{S} = \left\{t \longmapsto -\frac{1}{5}t - \frac{16}{25} \ + \ \lambda \mathrm{e}^{5t}\ /\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$
   - On travaille sur $\mathbb{R}$. $2y' + y = \mathrm{e}^{7t+1}$ a pour équation homogène $y' + \frac{1}{2}y = 0$ dont les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
     On cherche une solution particulière de la forme $f(t) = k\mathrm{e}^{7t+1}$ avec $k \in \mathbb{R}$ à déterminer. On a :
     $$(f \text{ est solution}) \Longleftrightarrow 2f' + f = \mathrm{e}^{7t+1} \Longleftrightarrow 14k\mathrm{e}^{7t+1} + k\mathrm{e}^{7t+1} = \mathrm{e}^{7t+1} \Longleftrightarrow 15k = 1 \Longleftrightarrow k = \frac{1}{15}$$
     Finalement, $f(t) = \frac{1}{15}\mathrm{e}^{7t+1}$ est solution particulière et l'ensemble des solutions est
     $$\mathcal{S} = \left\{t \longmapsto \frac{1}{15}\mathrm{e}^{7t+1} \ + \ \lambda \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\ /\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$
   - On travaille sur $\mathbb{R}$. $y' + y = \sin(3t)$ a pour équation homogène $y' + y = 0$ dont les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda \mathrm{e}^{-t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
     On cherche une solution particulière de la forme $f(t) = a\sin(3t) + b\cos(3t)$ avec a et b des réels à déterminer. On a :
     $$\begin{aligned}(f \text{ est solution}) &\Longleftrightarrow f' + f = \sin(3t) \Longleftrightarrow (a - 3b)\sin(3t) + (3a + b)\cos(3t) = \sin(3t) \\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a - 3b = 1 \\ 3a + b = 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} a - 3b = & 1 \\ 10b = & -3\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{10} \\ b = -\frac{3}{10}\end{array}\right.\end{aligned}$$
     Finalement, $f(t) = \frac{1}{10}\sin(3t) - \frac{3}{10}\cos(3t)$ est solution particulière et l'ensemble des solutions est
     $$\mathcal{S} = \left\{t \longmapsto \frac{1}{10}\sin(3t) - \frac{3}{10}\cos(3t) \ + \ \lambda \mathrm{e}^{-t}\ /\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

11. On travaille sur $\mathbb{R}$.
   — Résolution de l'équation homogène : $(1 + x^2)y' + xy = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{x}{1+x^2}y = 0$ a pour solution les fonctions de la forme $y(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   — Recherche de solution particulière avec la méthode de la variation de la constante. Soit $f(x) = \frac{\lambda(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ avec $\lambda(x)$ une fonction dérivable à trouver.
   f est solution de $(1 + x^2)y' + xy = \sqrt{1 + x^2}$ si, et seulement si :
   $$\begin{aligned}(1 + x^2)f'(x) + xf(x) = \sqrt{1 + x^2} &\Leftrightarrow (1 + x^2)\frac{\lambda'(x)\sqrt{1 + x^2} - \lambda(x)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + x^2} + x\frac{\lambda(x)}{\sqrt{1 + x^2}} = \sqrt{1 + x^2} \\ &\Leftrightarrow \lambda'(x)\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + x^2} \\ &\Leftrightarrow \lambda'(x) = 1\end{aligned}$$
   On prend $\lambda(x) = x$ et alors $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est solution particulière de l'équation $(1 + x^2)y' + xy = \sqrt{1 + x^2}$.

— La solution générale de l'équation différentielle est : $\left\{x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

— Condiditon initiale : soit $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ à déterminer. On a : $g(0) = 7 \Longleftrightarrow \lambda = 7$.

Finalement, la solution de $(1+x^2)y' + xy = \sqrt{1+x^2}$ qui vérifie $y(0) = 7$ est $g(x) = \frac{x+7}{\sqrt{1+x^2}}$.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 3

Cherchons des réels λ et μ tels que, pour $t \in \mathbb{R}\backslash\{1;-1\}$ on ait $\frac{\lambda}{1-t} + \frac{\mu}{1+t} = \frac{1+3t}{1-t^2}$.

$$\frac{\lambda}{1-t} + \frac{\mu}{1+t} = \frac{1+3t}{1-t^2} \Longleftrightarrow \lambda(1+t) + \mu(1-t) = 1+3t \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda - \mu = 3 \\ \lambda + \mu = 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \mu = -1 \end{array}\right.$$

On a donc, pour $t \in \mathbb{R}\backslash\{1;-1\}$, $\frac{1+3t}{1-t^2} = \frac{2}{1-t} - \frac{1}{1+t}$.

On résout $y' = \frac{1+3t}{1-t^2}$ sur un intervalle inclus dans $\mathbb{R}\backslash\{1;-1\}$ par exemple $]1;+\infty[$.
On a :

$$y' = \frac{1+3t}{1-t^2} \Longleftrightarrow y' = \frac{2}{1-t} - \frac{1}{1+t} \Longleftrightarrow y = -2\ln|1-t| - \ln(1+t) + k \Longleftrightarrow y = \ln\left(\frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\right) + k$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercice n° 4

1. $F(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t = 0$.
2. — Pour $x \in [0 \ ; \ 4]$, $F(x)$ est une intégrale avec les bornes « dans le bon sens », on peut l'interprêter comme une aire algébrique. Comme la fonction intégrée est positive, c'est une quantité positive.
   — Pour $x \in [-3 \ ; \ 0]$, pour $x \in [0 \ ; \ 4]$, $F(x)$ est une intégrale avec les bornes « dans le mauvais sens ». On a $F(x) = -\displaystyle\int_x^0 f(t)\mathrm{d}t$. L'intégrale peut alors être interprêtéz comme une aire algébrique ; la fonction intégrée est négative donc l'intégrale est négative et $F(x)$ est positif.
3. Géométriquement, le triangle isocèle dont les sommets sont O, $A(2;3)$ et $B(4;0)$ est inscrit dans la surface entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses, délimitée par les droites $x = 0$ et $x = 4$. Les surfaces sont ordonnées : $6 \leqslant F(4)$.

   De façon analogue, en inscrivant l'aire sous la courbe dans un rectangle, on a $F(4) \leqslant 12$.
4. On a $F' = f$ et donc on déduit les variations de F du signe de F : F est décroissante sur $[-3;0]$ et sur $[4;8]$; croissante sur $[0;4]$.

   Pour faire la figure, il faut ensuite respecter les contraintes vues dans les questions précédentes : variations, $F(0) = 0$, encadrement de $F(4)$.

Exercice n° 5

Il s'agit d'écrire les primitives cherchées à l'aide d'intégrales, puis de faire des intégrations par parties.

— La primitive de $f(x) = x^2\ln(x)$ qui s'annule en 1 est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x t^2\ln(t)\ \mathrm{d}t$.

On a :

$$F(x) = \left[\frac{1}{3}t^3\ln(t)\right]_1^x - \frac{1}{3}\int_1^x t^2\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}$$

— La primitive de $f(x) = x\text{Arctan}(x)$ qui s'annule en 0 est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x t\text{Arctan}(t)\ dt$.
On a :

$$F(x) = \left[\frac{1}{2}t^2\text{Arctan}(t)\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \underbrace{\frac{t^2}{1+t^2}}_{=1-\frac{1}{1+t^2}}\ dt = \frac{1}{2}\left(x^2\text{Arctan}(x) - x + \text{Arctan}(x)\right)$$

— La primitive de $f(x) = \mathrm{e}^x\cos(x)$ qui s'annule en 0 est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\cos(t)\ dt$.
On a :

$$F(x) = \left[\mathrm{e}^t\cos(t)\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^t\sin(t)\ dt = \mathrm{e}^x\cos(x) - 1 + \left[\mathrm{e}^t\sin(t)\right]_0^x - F(x)$$

On en déduit que $F(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x(\cos(x)+\sin(x)) - 1\right)$.
Remarque : dans ce dernier exemple, on aurait évité l'IPP en faisant apparaître des complexes.

Exercice n° 6

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^n\mathrm{e}^x$ est continue et donc intégrable sur $[0;1]$, ce qui prouve l'existence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{e}^x(x-1)\ \mathrm{d}x$. La fonction intégrée est négative sur $[0;1]$, les bornes sont dans le « bon sens », on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} - I_n \leq 0$. Autrement dit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Avec le même raisonnement qu'à la question précédente on montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geq 0$ et donc la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, elle converge donc vers un certain réel $\ell \geq 0$.

c) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} = [x^{n+1}\mathrm{e}^x]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = \mathrm{e} - (n+1)I_n$$

d) En passant à la limite, la relation $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$ est absurde pour $\ell \neq 0$, on en déduit $\ell = 0$.

Exercice n° 7

a) La fonction $f : u \mapsto \frac{1}{3+\mathrm{e}^{-u}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives, l'expression donnée pour F est celle de la primitive de f qui s'annule en 0.

b) Poser $t = \mathrm{e}^u$ signifie faire le changement de variable $\varphi(t) = \ln(t)$. On a alors :

$$F(x) = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{3+\frac{1}{t}} \times \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{3t+1}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}\ln|3t+1|\right]_1^{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{3}\ln(3\mathrm{e}^x+1) - \frac{\ln(4)}{3}$$

c) Il suffit de dériver pour vérifier. L'expression trouvée pour $F(x)$ est celle d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{3\mathrm{e}^x+1} \times (3\mathrm{e}^x) = \frac{1}{3+\frac{1}{\mathrm{e}^x}} = \frac{1}{3+\mathrm{e}^{-x}}$$

Exercice n° 8

- On fait le changement de variable $\varphi(t) = \sqrt{t}$: $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int_0^4 \frac{\sqrt{t}}{t^2+1} \times \frac{1}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\text{Arctan}(4)$.
- $\displaystyle\int_3^4 \frac{t+1}{t-2}\mathrm{d}t = \int_3^4 1 + \frac{3}{t-2}\ \mathrm{d}t = [t + 3\ln|t-2|]_3^4 = 1 + 3\ln(2)$.
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(3t+6)^2}\mathrm{d}t = 2\left[-\frac{1}{3}(3t+6)^{-1}\right]_0^1 = -\frac{2}{3}(\frac{1}{9} - \frac{1}{6}) = \frac{1}{27}$.

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{u+1} \times \frac{1}{u}\ \mathrm{d}u = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\ \mathrm{d}u = [\ln(u) - \ln(u+1)]_1^{\mathrm{e}} = 1 - \ln(\mathrm{e}+1) + \ln(2).$

Exercice n° 9

Il s'agit de procéder par la méthode de variation de la constante pour trouver les solutions particulières.

- Résolvons $(1+x^2)y' + 2xy = \mathrm{e}^x + x$ sur $\mathbb{R}$.
  L'équation homogène est $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = 0$ a pour solution l'ensemble des fonctions de la forme $\frac{\lambda}{1+x^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Soit $\lambda(x)$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, notons $f(x) = \frac{\lambda(x)}{1+x^2}$. $f(x)$ est solution particulière de l'équation différentielle si, et seulement si :

$$\begin{aligned}(1+x^2)f'(x) + 2xf(x) = \mathrm{e}^x + x &\iff \lambda'(x) - \frac{\lambda(x)2x}{1+x^2} + 2x\frac{\lambda(x)}{1+x^2} = \mathrm{e}^x + x \\ &\iff \lambda'(x) = \mathrm{e}^x + x\end{aligned}$$

  On prend $\lambda(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2$ et $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2}{1+x^2}$ est solution particulière de l'équation.

  Finalement, la solution générale de l'équation est $\left\{x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + x + \lambda}{1+x^2}\ /\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

- Résolvons $\ln(x)y' + \frac{y}{x} = 1$ sur un intervalle contenu dans $]0;1[\cup]1;+\infty[$.
  L'équation homogène est $y' + \frac{1}{x\ln(x)}y = 0$, elle a pour solution l'ensemble des fonctions de la forme $\frac{\lambda}{\ln(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Soit $\lambda(x)$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, notons $f(x) = \frac{\lambda}{\ln(x)}$. $f(x)$ est solution particulière de l'équation différentielle si, et seulement si :

$$\begin{aligned}\ln(x)y' + \frac{y}{x} = 1 &\iff \frac{\lambda'(x)\ln(x) - \lambda(x)\frac{1}{x}}{\ln(x)} + \frac{1}{x}\frac{\lambda(x)}{\ln(x)} = 1 \\ &\iff \lambda'(x) = 1\end{aligned}$$

  On prend $\lambda(x) = x$ et alors $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ est solution particulière de l'équation.

  Finalement, la solution générale de l'équation est $\left\{x \longmapsto \dfrac{x+\lambda}{\ln(x)}\ /\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice n° 10

a) La désintégration des noyaux radio-actifs correspond à une équation différentielle du type $y' = -ky$ où k est une constante positive qui dépend du noyau étudié.
Les solutions de cette équation sont de la forme $N(t) = N_0\mathrm{e}^{-kt}$ où N_0 est la quantité de noyau pour $t = 0$. La demi-vie $\tau_{1/2}$ est le temps pris pour que le stock diminue de moitié. On a donc :

$$N(\tau_{1/2}) = \frac{1}{2}N_0 \iff N_0\mathrm{e}^{-k\tau_{1/2}} = \frac{1}{2}N_0 \iff k = \frac{\ln(2)}{\tau_{1/2}}$$

Dans cent ans, le stock sera de $N(100) = N_0\mathrm{e}^{-100k} = N_0\mathrm{e}^{-\frac{100\ln(2)}{\tau_{1/2}}} \simeq 0,96N_0$.
La proportion du stock initial toujours présente sera approximativement de 96%.

b) Soit $t_{0,1}$ le temps au bout duquel 90% du stock a disparu. On a :

$$N(t_{0,1}) = 0,1N_0 \iff N_0\mathrm{e}^{-kt_{0,1}} = 0,1N_0 \iff t_{0,1} = \frac{\ln(10)}{k}$$

D'après la valeur trouvée pour k on a $t_{0,1} = \frac{\ln(10)\ln(2)}{\tau_{1/2}} \simeq 5322$.
Il faudra donc attendre environ 5322 ans pour que 90% du stock ait disparu.

Exercice n° 11

a) Dire que la cinétique est d'ordre 1 signifie que $[H_2O_2]$ satisfait l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ où λ est une constante positive qui dépend des conditions expérimentales.

b) Les solutions de $y' = -\lambda y$ sont les fonctions de la forme $f(t) = k\mathrm{e}^{-\lambda t}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Ici, on a $f(0) = 12,3$ donc on déduit $k = 12,3$ et donc $[H_2O_2] = 12.3\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

c) On a $\ln[H_2O_2] = \ln(12,3) - \lambda t$, c'est donc une fonction affine décroissante.

d) On place les points dans un repère orthonormé, on estime la pente de la droite sur laquelle ils sont alignés à $-0,002$, une valeur approchée de λ est donc $0,002$.

e) Le temps de demi-réaction $\tau_{1/2}$ est le temps au bout duquel la moitié du réactif a disparu. On a :

$$12,3\mathrm{e}^{-\lambda\tau_{1/2}} = \frac{12,3}{2} \Longleftrightarrow \tau_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

On a donc $\tau_{1/2} \simeq 346$ sec.

Exercice n° 12

Raisonnons par analyse-synthèse.

Supposons qu'il existe une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = f(x) + x\ \ : (\star)$.
En évaluant $\star$ en 0 il vient $f(0) = 0$.
D'autre part $x \mapsto \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ étant une primitive de f, c'est une fonction dérivable et puisque $(\star)$ est vérifiée, c'est aussi le cas de $f(x) + x$. On peut donc dériver $(\star)$ et il vient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f'(x) + 1$.
f est donc la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y' - y = -1 \end{cases}$, soit $f(x) = 1 - \mathrm{e}^x$.

On vérifie que $f(x) = 1 - \mathrm{e}^x$ est bien solution de $(\star)$.

3 Plus difficile...

Exercice n° 13

a) $\forall t \in \mathbb{R},\ 1 + \cos(t) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} + \mathrm{e}^{It}) = \mathrm{Re}\left(2\cos(\frac{t}{2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}\right) = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$.

b) Faisons le changement de variable $\varphi(t) = \sin(t)$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sqrt{1-\sin(t)^2}} \times \cos(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1+\cos(t)}\ \mathrm{d}t \qquad\qquad (\text{car } \cos(t) \geq 0 \text{ sur } [0; \frac{\pi}{2}]) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \frac{1}{1+\cos(t)}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \frac{1}{2\cos^2(\frac{t}{2})}\ \mathrm{d}t \\
&= \left[t - \tan(\frac{t}{2})\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}$$

Exercice n° 14

Soit $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Les intégrales $I = \displaystyle\int_0^x \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\mathrm{d}t$ existent en tant qu'intégrales de fonctions continues sur des segments.

On a : $I + J = x$ et $I - J = [\ln(\cos(t)+\sin(t))]_0^x = \ln(\cos(x)+\sin(x))$.

On en déduit que $I = \dfrac{x + \ln(\cos(x)+\sin(x))}{2}$ et $J = \dfrac{x - \ln(\cos(x)+\sin(x))}{2}$.

Exercice n° 15

1. On travaille sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur lequel $\cos(x)$ ne s'annule pas. On a donc :

$$y'\cos(x) - y\sin(x) = \cos(x) \iff y' - \tan(x)y = 1$$

L'équation homogène a pour solutions les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{\lambda}{\cos(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière de la forme $f(x) = \frac{\lambda(x)}{\cos(x)}$ où $\lambda(x)$ est une fonction dérivable à déterminer. On a :

$$\begin{aligned} f'\cos(x) - f\sin(x) = \cos(x) &\iff \frac{\lambda'(x)\cos(x) + \lambda(x)\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\lambda(x)}{\cos(x)}\sin(x) = \cos(x) \\ \lambda'(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

On prend $\lambda(x) = \sin(x)$ et la fonction $f(x) = \tan(x)$ est une solution particulière de $y'\cos(x) - y\sin(x) = \cos(x)$.

Finalement, $y'\cos(x) - y\sin(x) = \cos(x)$ admet pour solution $\left\{x \mapsto \tan(x) + \frac{\lambda}{\cos(x)} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

2. Les solutions de l'équation sont de la forme $y(x) = \frac{\sin(x)+\lambda}{\cos(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Pour $x \to \pm\frac{\pi}{2}$, $\cos(x) \to 0^+$ et donc, si le numérateur a une limite finie non nulle, le quotient tend vers $\pm\infty$ selon la règle des signes.
Pour avoir **peut-être** une limite finie en $\frac{\pi}{2}$ il faut que $\sin(x) + \lambda \to 0$ soit $\lambda = -1$. On a alors :

$$\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)} = \frac{\sin(x) - \sin(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} \times \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos(x) - \cos(\frac{\pi}{2})} \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} \sin'(\frac{\pi}{2}) \times \frac{1}{\cos'(\frac{\pi}{2})} = 0$$

Si $\lambda = -1$, $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} y(x) = -\infty$. En raisonnant comme en $\frac{\pi}{2}$, il faut que $\lambda = 1$ pour avoir une limite finie en $-\frac{\pi}{2}^+$ (cette limite est alors effectivement finie et vaut 0).

Finalement, il n'existe pas de solutions ayant des limites finies en $-\frac{\pi}{2}$ **et** en $\frac{\pi}{2}$.
On peut avoir une des deux limites qui est finie (elle vaut alors 0) en prenant $\lambda \in \{-1; 1\}$.

Exercice n° 16

Raisonnons par analyse-synthèse.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x)\ : (\star)$.
Par composition, $f : x \mapsto f(-x)$ est continue et dérivable, on en déduit que f est deux fois dérivable.
En dérivant la relation $(\star)$ on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f'(-x)$ et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f(x)$. On en déduit que $f(x)$ est de la forme $f(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$ avec A, B des réels.

Soit $f(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$ avec A, B des réels, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x)$ et $f(-x) = A\cos(x) - B\sin(x)$ donc f satisfait la relation $(\star)$ si, et seulement si, $A = B$.

Finalement, les fonctions cherchées sont les fonctions de la forme $f(x) = A(\cos(x)+\sin(x))$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Exercice n° 17

L'équation (E) est non linéaire, on ne sait pas la résoudre directement.

Raisonnons par analyse-synthèse :
Supposons que f soit solution de (E). De deux choses l'une :

- soit f est nulle ;
- soit il existe un intervalle I sur lequel f ne s'annule pas et alors, sur I on peut considérer $y = \frac{1}{f}$.
  On a alors, $f' = -\frac{y'}{y^2}$ et :

$$f \text{ est solution de } (E) \Longleftrightarrow -\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{y}(1 - \frac{1}{y}) \Longleftrightarrow y' = y - 1$$

  On obtient que $y \in \{x \mapsto 1 + \lambda \mathrm{e}^x, \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$ et donc $f \in \{x \mapsto \frac{1}{1+\lambda \mathrm{e}^x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$

On vérifie que la fonction nulle est que les fonctions $f(x) = \frac{1}{1+\lambda \mathrm{e}^x}$ sont bien solutions de (E).

Remarque : qu'ai-je mis sous le tapis ?