

# Chapitre 6 - Arithmétique - Exercices

## 1 Applications directes du cours

### Exercice n° 1

---

1. Donner l'ensemble des diviseurs de 50, l'ensemble des diviseurs de 12 puis  $50 \wedge 12$ .
2. Donner l'ensemble des multiples de 12, l'ensemble des multiples de 50 puis  $12 \vee 50$ .
3. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 728 et de 500.  
En déduire  $728 \wedge 500$  ainsi que  $728 \vee 500$ .
4. Calculer  $9831 \wedge 2741$  ainsi que  $9831 \vee 2741$ .

## 2 Vrai ou faux sur l'ensemble du chapitre

Dans toutes les propositions,  $a, b, c, d$  désignent des entiers,  $n$  un entier non nul.

- a) Il existe des entiers ayant exactement  $n$  diviseurs.
- b) Si  $a|b$  alors  $a \wedge b = a$ .
- c) Il y a un lien logique entre  $a|b$  et  $a \leq b$ .
- d) Deux nombres pairs ne peuvent pas être premiers entre eux.
- e) Si  $a \nmid b$  et  $b \nmid a$  alors  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.
- f) Si les  $n$  premiers nombres premiers sont  $p_1, \dots, p_n$  alors  $p_1 \times \dots \times p_n + 1$  est premier.
- g) Si  $a|c$  et  $b|c$  alors  $ab|c$ .
- h) Deux nombres premiers sont premiers entre eux.
- i) Si  $d = a \wedge b = b \wedge c$  alors  $d = a \wedge c$ .

## 3 Un peu plus dur

### Exercice n° 2

---

- a) Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ . Démontrer qu'aucun entier de  $\llbracket n! + 2; n! + n \rrbracket$  n'est premier.
- b) En déduire un intervalle d'entiers de longueur  $n$  qui ne contient aucun nombre premier.

### Exercice n° 3

---

Appliquer l'algorithme d'Euclide pour prouver que 700 et 143 sont premiers entre eux. En déduire des entiers  $u$  et  $v$  tels que  $700u + 143v = 1$ .

### Exercice n° 4

---

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $n + 1$  et  $2n + 1$  sont premiers entre eux.

### Exercice n° 5

---

En considérant les restes dans la division euclidienne par 9, montrer que si  $a, b, c$  sont des entiers qui vérifient  $a^3 + b^3 = c^3$  alors, un au moins de ces entiers, est un multiple de 3.

### Exercice n° 6

---

Soit  $n \geq 2$  Démontrer que la somme de  $n$  entiers impairs consécutifs n'est pas un nombre premier.

## 4 Un peu de Python

### Exercice n° 7

---

Programmer en Python une fonction qui prend en entrée un entier naturel  $n$  et renvoie `True` si  $n$  est premier, `False` sinon.

### Exercice n° 8

---

Programmer en Python une fonction qui prend en entrée un entier naturel  $n$  et renvoie la liste (par ordre croissant) des nombres premiers qui sont inférieurs à  $n$ .

## 5 Exercices plus difficiles

### Exercice n° 9

---

- a) Justifier que tout nombre premier  $p > 2$  est de la forme  $4k + 1$  ou  $4k + 3$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .
- b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ , si  $p_1, \dots, p_n$  désignent les  $n$  premiers nombres premiers alors  $1 + \prod_{i=1}^n p_i$  est de la forme  $4k + 3$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .
- c) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme  $4k + 3$  avec  $k \in \mathbb{N}$

### Exercice n° 10

---

Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  l'équation  $a^2 - b^2 = a \wedge b + 2$ .