Arithmétique des entiers - correction des xercices

Exercice n° 1

i. Vrai. 1 possède exactement 1 diviseur, 2^1 exactement deux (1 et 2), 2^2 exactement 3 (1, 2 et 4), 2^3 exactement 4 (1, 2, 4 et 8). Par une récurrence immédiate, 2^{n-1} admet exactement n diviseurs.

ii. Vrai. Si $a|b$ alors a est un diviseur commun à a et b et donc $a \leq a \wedge b$. Or, $a \wedge b$ est un diviseur de a donc $a \wedge b \leq a$.

iii. Vrai. On a $a|b \implies a \leq b$.

iv. Vrai. Deux nombres pairs sont divisibles par 2 et donc leur PCCD est supérieur ou égal à 2.

v. Faux. $a = 6$ et $b = 9$ est un contre-exemple.

vi. Faux. $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30031$ est divisible par 59.

vii. Faux. $a = 3$, $b = c = 6$ est un contre exemple.

viii. Vrai si les nombres sont différents. Soit a et b deux nombres premiers. Leurs listes de diviseurs sont $(1, a)$ et $(1, b)$. On a donc $a \wedge b = 1$ si $a \neq b$.

ix. Faux. $a = c = 3$ et $b = 2$ fournit un contre-exemple. (On a alors $d = 1$).

Exercice n° 2

1. L'ensemble des diviseurs de $50 = 2 \times 5^2$ est $\{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$; l'ensemble des diviseurs de $12 = 2^2 \times 3$ est $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. $50 \wedge 12 = 2$.
2. L'ensemble des multiples de $12 = 2^2 \times 3$ est $\{12n \ / \ n \in \mathbb{N}^*\} = \{2^p \times 3^q \times r \ / \ p \geq 2,\ q \geq 1,\ r \in \mathbb{N}^*\}$, l'ensemble des multiples de 50 est $\{50n \ / \ n \in \mathbb{N}^*\} = \{2^s \times 5^t \times u \ / \ s \geq 1,\ t \geq 2,\ u \in \mathbb{N}^*\}$.
On en déduit que $12 \vee 50 = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$.
3. $728 = 2^3 \times 7 \times 13$ et de $500 = 2^2 \times 5^3$.
On a : $728 \wedge 500 = 2^2 = 4$ ainsi que $728 \vee 500 = 2^3 \times 5^3 \times 7 \times 13 = 91000$.
4. Plusieurs méthodes sont possibles : déterminer les décompositions en produits de facteurs premiers ou utiliser l'algorithme d'Euclide.
On trouve $9831 \wedge 2741 = 1$ et donc $9831 \vee 2741 = 9831 \times 2741 = 26946771$.

Exercice n° 3

a) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$. les éléments de $[\![n! + 2; n! + n]\!]$ sont de la forme $n! + p$ avec $p \in [\![2; n]\!]$ qui est divisible par p (car $n!$ l'est) et donc ne sont pas premiers.

b) La question précédente nous fournit un intervalle d'entiers de longueur $n - 1$ qui ne contient aucun nombre premier. Pour avoir un intervalle d'entiers de longueur n qui ne contient aucun nombre premier, il suffit de prendre $[\![(n + 1)! + 2; (n + 1)! + n + 1]\!]$.

Exercice n° 4

On a : $700 = 143 \times 4 + 128$; $143 = 128 \times 1 + 15$; $128 = 15 \times 8 + 8$; $15 = 8 \times 1 + 7$; $8 = 7 \times 1 + 1$

On « remonte » la suite des divisions euclidiennes :
$1 = 8-7 = 8-(15-8) = 8\times2-15 = (128-15\times8)\times2-15 = 128\times2-15\times17 = 128\times2-(143-128)\times17$
$= 128 \times 19 - 143 \times 17 = (700 - 143 \times 4) \times 19 - 143 \times 17 = 700 \times 19 - 143 \times 93$.

Exercice n° 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On applique l'algorithme d'Euclide : $2n + 1 = (n + 1) \times 1 + n$; $n + 1 = n \times 1 + 1$. Cela prouve que $n + 1$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
On pouvait également utiliser Bézout en remarquant $2 \times (n + 1) - 1 \times (2n + 1) = 1$.

Exercice n° 6

On commence par observer, selon le reste dans la division d'un nombre n par 9 le reste dans la division de n^3 par 9 :

reste dans la division de n	reste dans la division de n^3
0	0
1	1
2	8
3	0
4	1
5	8
6	0
7	1
8	8

Si $a^3 + b^3 = c^3$ alors le reste de $a^3 + b^3$ est 0, 1 ou 8.

— Si le reste est 0 alors le reste de c dans la division par 9 est 0, 1 ou 6. Dans les trois cas c est divisible par 3.

— Si le reste est 1 alors les restes dans les divisions de a^3 et b^3 par 9 sont forcément 0 et 1. L'entier dont le reste de la division du cube par 9 est 0 est divisible par 3 (c'est la même situation que c dans le cas précédent).

— Si le reste est 8 alors les restes dans les divisions de a^3 et b^3 par 9 sont forcément 0 et 8. À nouveau, L'entier dont le reste de la division du cube par 9 est 0 est divisible par 3.

Finalement, au moins un des entiers a, b et c est divisible par 3.

Exercice n° 7

Soit $n \geq 2$. La somme de n entiers impairs consécutifs est la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 2 :

$$a+(a+2)+(a+4)+\cdots+(a+2\times(n-1)) = na+2\times(1+2+\ldots(n-1)) = na+2\times\frac{n(n-1)}{2} = n\times(a+n-1)$$

Finalement, cette somme est divisible par n et n'est donc pas un nombre premier.

Exercice n° 8

```python
def est_premier(n):
    # n est un int
    # renvoie True si n est premier, false sinon

    test=True #booléen qu'on renverra à la fin

    if n==0 or n==1 :
        test=False

    else :
        k=2
        while k<=n**.5 and test:
            test=(n%k!=0)
            #si le reste dans la division de n par k est non nul, n n'est pas
            #divisible par k et on continue. Si le reste est nul, k est un
            #diviseur de n et on arrête car n n'est pas premier
            k=k+1
    return(test)
```

Exercice n° 9

```python
def liste_premiers(n):
    # n est un int
    # renvoie la liste des nombres premiers <=n, par ordre croissant
    liste=[] # liste qu'on renverra
    k=2
    while k<=n :
        if est_premier(k):
            liste.append(k)
        k=k+1
    return(liste)
```

Remarque : au lieu de programmer le crible d'Eratosthène, on a lâchement utilisé la question précédente. En termes d'économies d'énergie : au moment de la rédaction de ce corrigé, c'est optimal. Par contre, au moment de l'execution de la fonction, c'est très mauvais.

Exercice n° 10

a) Un nombre premier $p > 2$ est impair et donc sa division euclidienne par 4 est de la forme $4k+1$ ou $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

b) On raisonne par récurrence. Pour $n=1$, $1+\prod_{i=1}^{n} p_i = 1+2 = 3$ est de la forme $4k+3$.

Supposons que $1+\prod_{i=1}^{n} p_i = 4k+3 \iff \prod_{i=1}^{n} p_i = 4k+2$.

On a alors $1+\prod_{i=1}^{n+1} p_i = 1+p_{n+1}(4k+2) = 4kp_{n+1}+2p_{n+1}+1$.

p_{n+1} étant impair, il est de la forme $2k'+1$ et alors $1+\prod_{i=1}^{n+1} p_i = 4(kp_{n+1}+2k')+1 = 4\widehat{k}+1$ avec $\widehat{k} = kp_{n+1}+2k'$.

Finalement, pour tout entier naturel non nul n, $1+\prod_{i=1}^{n} p_i$ est de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

c) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers de la forme $4k+3$; soit n le rang de ce nombre premier. D'après la question précédente $1+\prod_{i=1}^{n} p_i$ est de la forme $4k+3$. Ce nombre admet une décomposition en produit de facteurs premiers, tous impairs, et tous différents de $p_1, \dots, p_n$. Ces nombres premiers ne peuvent pas tous être de la forme $4k+1$ (car sinon leur produit serait aussi de cette forme). Il existe donc un nombre premier de la forme $4k+3$ qui n'est pas parmi les n premiers nombres premiers, ce qui est contradictoire.
Finalement, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice n° 11

On procède par analyse-synthèse.
Analyse : $a^2-b^2 = a \wedge b + 2$ implique $a \wedge b | 2$ ce qui implique $a \wedge b \in \{1;2\}$.

— Si $a \wedge b = 1$ l'équation devient $a^2-b^2=3 \iff (a-b)(a+b)=3$. a et b étant entiers, $a-b$ et $a+b$ aussi et $3 = 1\times 3$ est la seule décomposition de 3 en produit d'entiers. On a alors $a-b=1$ et $a+b=3$ soit $(a,b)=(2,1)$.

— Si $a \wedge b = 2$ l'équation devient $a^2-b^2=4 \iff (a-b)(a+b)=4$. On a alors deux possibilités : soit $a-b=2$ et $a+b=2$ qui conduit à $(a,b)=(2,0)$; soit $a-b=1$ et $a+b=4$ qui n'est pas possible.

Synthèse : $(2,1)$ et $(2,0)$ conviennent.

Finalement, l'équation $a^2-b^2 = a\wedge b+2$ admet deux solutions : $(2,1)$ et $(2,0)$.