Chapitre 7 - Suites - Exercices

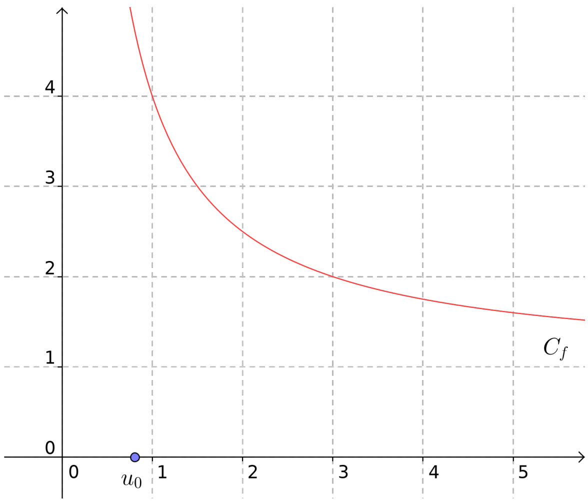
1 Applications directes du cours

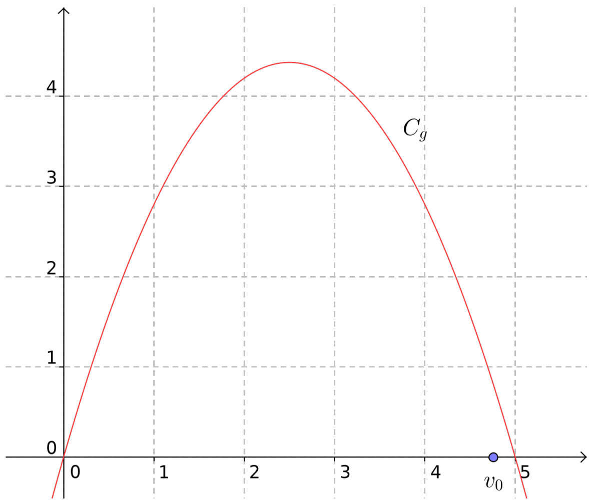
Exercice n° 1

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Comment noter le 10è terme de u ? La somme des 100 premiers termes de u ? La somme des 1000 premiers termes d'indices pairs de u ?
2. Soit la suite définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \frac{u_n}{u_n+2} \end{array}\right.$. Exprimer de façon explicite u_n en fonction de n.
3. Soit la suite u définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = -2u_n + 1$. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
4. Déterminer la suite v qui est solution de $\left\{\begin{array}{l} v_0 = 2,\ v_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n \end{array}\right.$.
5. En utilisant la définition, démontrer que : $\frac{n^2+n-2}{2n^2-4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ et que : $n^2 - n^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exercice n° 2

Sur les deux figures ci-dessous, représenter sur l'axe des abscisses les premiers termes des suites u et v qui vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_{n+1} = g(v_n)$.





Exercice n° 3

Etudier les variations des suites suivantes :

$$\left(\frac{3-n^2}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad ; \quad \left(\frac{3^n}{2\times 5^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad ; \quad (\cos n)_{n\in\mathbb{N}} \quad ; \quad \left(\frac{4^n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad ; \quad \left(\frac{n!}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{4+x_n^2} \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{l} z_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{z_n^2}{1+z_n} \end{array}\right.$$

Exercice n° 4

Étudier les comportements asymptotiques des suites suivantes :

$$\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad ; \quad \left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad ; \quad \left(\frac{n^2+n\cos n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad ; \quad \left(\frac{2+(-1)^n n}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

2 Vrai ou faux sur l'ensemble du chapitre

a) Une suite bornée est convergente.

b) Une suite stationnaire est bornée.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son approximation décimale. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

d) Soit f une fonction croissante. Toute suite u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante.

e) Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont croissantes, alors u est croissante.

f) La suite $(2n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

g) Une suite géométrique décroissante à une raison positive.

h) Si u est une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_n}{u_{n+1}} < 1$ alors u est monotone.

i) Si u et v ont la même limite (finie ou infinie) alors uv a une limite.

j) Si u et v sont des suites qui convergent avec $u < v$ alors $\lim u < \lim v$.

k) Si u est une suite qui diverge alors ses suites extraites divergent.

3 Un peu plus dur

Exercice n° 5

Dans les situations suivantes, il faut trouver (si c'est possible) des exemples de suites u et v satisfaisant les conditions données.

a) $u \to +\infty$, $v \to +\infty$ et $\dfrac{u}{v} \to 0$

b) $u \to +\infty$, $v \to +\infty$ et $\dfrac{u}{v} \to 2$

c) $u \to +\infty$, $v \to +\infty$ et $\dfrac{u}{v} \to -\infty$

d) $u \to +\infty$, $v \to +\infty$ et $\dfrac{u}{v} \to +\infty$

e) $u \to +\infty$, $v \to -\infty$ et $\dfrac{u}{v} \to 5$

f) $u \to +\infty$, $v \to +\infty$ et $\dfrac{u}{v}$ n'a pas de limite.

Exercice n° 6

On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

a) On note $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$. Prouver que $[1;2]$ est stable par f. Qu'en déduire pour la suite u ?

b) Prouver que u est strictement croissante, puis que u converge.

c) Déterminer la limite de u.

Exercice n° 7

Etudier les limites éventuelles des suites suivantes :

$$\left(n\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad ; \quad \left(n^4 - n^2 - 1\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad ; \quad (n\cos(\pi n))_{n\in\mathbb{N}} \quad ; \quad ((0.3)^n - \pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\left(\frac{3n + 2^n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad ; \quad \left(\frac{\lfloor n \rfloor}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad ; \quad \left(\frac{\lfloor\sqrt{2n}\rfloor}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad ; \quad \left(\frac{n^3}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

Exercice n° 8

On considère la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}$.

1. Etudier les variations de S. Que peut-on en déduire sur le comportement asymptotique de S ?
2. Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \dfrac{1}{(k+1)^2} < \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ *(Faire une figure)*
3. En conclure que S converge.

Exercice n° 9

Soient $a_0 < b_0$ deux réels. On définit par récurrence les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \frac{2a_n+b_n}{3} \\ b_{n+1} & = & \frac{a_n+2b_n}{3} \end{array}\right.$$

1. Prouver que $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, en déduire l'expression de $a_n - b_n$ en fonction de n.
2. Prouver que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. En calculant $a_n + b_n$, trouver leur limite commune

Exercice n° 10

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ sont adjacentes puis utiliser Python pour émettre une conjecture sur la limite commune de ces suites.

4 Démontrer les résultats du cours

Exercice n° 11

Démontrer que si une suite admet une limite, alors cette limite est unique.

Exercice n° 12

Démontrer qu'une suite convergente est bornée.

Exercice n° 13

Démontrer que si la suite u admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors toute suite extraite de u admet cette limite.

Exercice n° 14

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner les expressions des approximations décimales de x par défaut et par excès.
2. Prouver que x est la limite d'une suite de rationnels.

5 Plus difficile...

Exercice n° 15

Prouver $\sup\{\sin(n) \ / \ n \in \mathbb{N}\} = 1$.

Exercice n° 16

Pour $n > 1$, soit la fonction $f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right) - 1$.

1. Prouver que $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$. On la note a_n.
2. Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel $\ell \in [0; 1[$.
3. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n < \frac{2}{3}$.
4. Déterminer ℓ.

Exercice n° 17

Que dire du comportement asymptotique d'une suite de complexe z vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$?