Correction des exercices du chapitre 7

Exercice n° 1

a) Faux. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais n'est pas convergente.

b) Vrai. Soit u, une suite stationnaire. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la suite est constante à partir du rang N : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow u_n = u_N$.
On a alors, $\forall n \in \mathbb{N},\ \min\{u_k, k \in [\![0; N]\!]\} \leq u_n \leq \max\{u_k, k \in [\![0; N]\!]\}$ et donc u est bornée.

c) Vrai. Soit $x \in \mathbb{R}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son approximation décimale est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n}$.
Montrons que cette suite est monotone.
$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - x_n = \frac{\lfloor x10^{n+1} \rfloor}{10^{n+1}} - \frac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n} = \frac{1}{10^{n+1}}\left(\lfloor x10^{n+1} \rfloor - 10\lfloor x10^n \rfloor\right)$ qui est du signe de $\lfloor x10^{n+1} \rfloor - 10\lfloor x10^n \rfloor$. Ces nombres vérifient :
- $x10^n - 1 < \lfloor x10^n \rfloor \leq x10^n \Longrightarrow x10^{n+1} - 10 < 10\lfloor x10^n \rfloor \leq x10^{n+1}$.
- $x10^{n+1} - 1 < \lfloor x10^{n+1} \rfloor \leq x10^{n+1}$.

Comme ce sont des entiers, on en déduit $10\lfloor x10^n \rfloor \leq \lfloor x10^{n+1} \rfloor$ et que la suite est croissante.

d) Faux. La fonction $f(x) = \frac{1}{2}x$ est croissante. La suite définie par $u_0 = 1$ etla relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ est la suite géométrique $(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est strictement décroissante.

e) Faux. La suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} n \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{2}n \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ a ses suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ qui sont croissantes, mais u n'est croissante (car $u_4 = 4$ alors que $u_5 = \frac{5}{2}$).

f) Faux. 2 est un terme de la suite $(2n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ mais pas de $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

g) Vrai. Une suite géométrique monotone a une raison positive.

h) Faux. Par exemple la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_n}{u_{n+1}} < 1$ mais n'est pas monotone.

i) Vrai. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ la limite commune de u et v. Par opérations, si $\ell \in \mathbb{R}$ alors $uv \to \ell^2$; si $\ell \in \{\pm\infty\}$ alors $uv \to +\infty$.

j) Faux. Par exemple $u = (-\frac{1}{n})_{n>0}$ et $v = (\frac{1}{n})_{n>0}$ vérifient $u < v$ mais $\lim u = \lim v = 0$.

k) Faux. Par exemple $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge mais sa suite extraite des termes d'indices pairs est constante et converge vers 1.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

1. Attention : comme les termes sont numérotés à partir de 0, le premier terme est u_0 et le 10è terme de u est u_9. La somme des 100 premiers termes de u est $\displaystyle\sum_{n=0}^{99} u_n$; la somme des 1000 premiers termes d'indices pairs de u est $\displaystyle\sum_{n=0}^{999} u_{2n}$.

2. On calcule les premiers termes et on conjecture que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2^{n+1}-1}$. On démontre cette conjecture par récurrence.

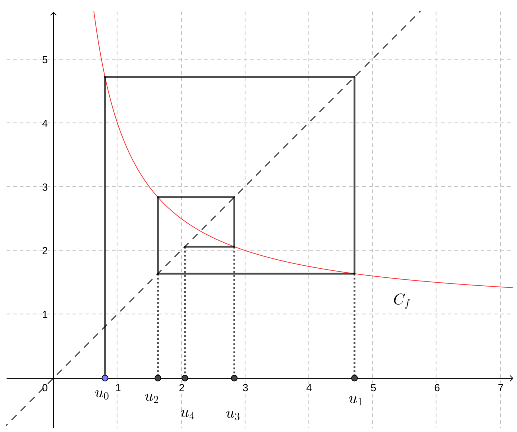
3. La suite u est aritmético-géométrique. On applique la méthode du cours :
— le point fixe de $x \mapsto -2x + 1$ est $r = \frac{1}{3}$;
— la suite $(u_n - r)_n$ est géométrique de raison -2 ce qui signifie que :

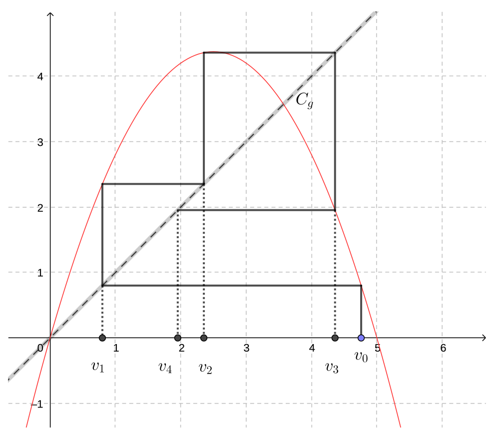
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - r = (u_0 - r)(-2)^n \quad\Longleftrightarrow\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (3 - \frac{1}{3})(-2)^n + \frac{1}{3}$$

4. La suite v est récurrente linéaire d'ordre 2. On applique la méthode du cours :
   — l'équation caractéristique est
$$r^2 = -2r+1 \iff r^2+2r-1=0 \iff (r+1)^2-2=0 \iff (r+1+\sqrt{2})(r+1-\sqrt{2})=0$$
   — L'équation caractéristique a deux solutions réelles $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$ et donc il existe deux réels λ et μ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \lambda(-1+\sqrt{2})^n + \mu(-1-\sqrt{2})^n$$
   — On se sert des premiers termes pour trouver λ et μ :
$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda+\mu = 2 \\ -(\lambda+\mu)+\sqrt{2}(\lambda-\mu) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda+\mu = 2 \\ \lambda-\mu = \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1+\frac{3}{2\sqrt{2}} \\ \mu = 1-\frac{3}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$
   — Finalement, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (1+\frac{3}{2\sqrt{2}})(-1+\sqrt{2})^n + (1-\frac{3}{2\sqrt{2}})(-1-\sqrt{2})^n$.
5. Dans les deux cas, écrit la définition et on vise la dernière partie $n \geq N \implies$ condition. On commence par trouver une expression plus simple, c'est-à-dire une condition plus faible et donc plus facile à satisfaire.
   a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{n^2+n-2}{2n^2-4} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n}{2(n^2-2)}\right|$. Pour $n > 1$ on a $n^2 > 2$ et donc $\forall n > 1$,
$$\left|\frac{n^2+n-2}{2n^2-4} - \frac{1}{2}\right| = \frac{n}{2(n^2-2)} < \frac{n}{(n^2-2)} < \frac{n+\sqrt{2}}{(n+\sqrt{2})(n-\sqrt{2})} = \frac{1}{n-\sqrt{2}}$$
   Soit $\varepsilon > 0$. On a, pour tout $n > 1$:
$$\frac{1}{n-\sqrt{2}} < \varepsilon \iff n-\sqrt{2} > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{2} \Longleftarrow n > \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 2$$
   Finalement, en posant $N = \max(1, \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 2)$ on a :
$$n > N \implies \frac{1}{n-\sqrt{2}} < \varepsilon \implies \left|\frac{n^2+n-2}{2n^2-4} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$
   b) $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2-n^3 = n^2(1-n)$ et, comme $n \geq 2 \implies 1-n \leq -1$, on a : $\forall n \geq 2,\ n^2-n^3 \leq -n^2$. Soit $A < 0$, $-n^2 < A \iff n^2 > -A \iff n > \sqrt{-A}$. Finalement, en posant $N = \lfloor \sqrt{-A} \rfloor + 1$ on a :
$$n \geq N \implies -n^2 < A \implies n^2 - n^3 < A$$

Exercice n° 3

On trace la droite $y = x$ qui nous permet de reporter sur l'axe des abscisses les points construits sur l'axe des ordonnées :





Pour être certain de bien comprendre, indiquez les coordonnées de tous les points construits.

Exercice n° 4

a) La fonction $x \mapsto \frac{3-x^2}{x+2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Sa dérivée est strictement négative sur $\mathbb{R}^+$ et donc la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que la suite $\left(\frac{3-n^2}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{3^n}{2\times 5^{n-1}} = \frac{5}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ et donc la suite considérée est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$. Comme son premier terme est positif, elle est strictement décroissante.

c) On a $\cos 0 = 1$. Comme $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$ on a $\cos 2 < 0$ et comme $\frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi$ on a $\cos 6 > 0$. Il suit que $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

d) Soit $v = \left(\frac{4^n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. v est une suite strictement positive et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{v_{n+1}}{v_n} = 4\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2$$

Pour $n \geq 1$ on a $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ et $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2 \geq \frac{1}{4}$. Il suit que, pour $n \geq 1$ on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 1$ et donc la suite est croissante.
(Notez que si on prend $n > 1$ les inégalités deviennent strictes et donc la suite est strictement croissant pour $n > 1$, il faut comparer v_1 et v_2 pour voir si elle est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$).

e) On procède de façon identique :

$$\forall n > 0,\ \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^2}}{\frac{n!}{n^2}} = n\frac{n}{n+1} = n(1-\frac{1}{n+1}) \geq \frac{1}{2}n$$

Pour $n \geq 2$ la suite est croissante. On calcule les deux premiers termes : 1 et $\frac{1}{2}$, la suite n'est donc pas monotone.

f) La suite x est clairement positive. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - x_n = \sqrt{4+x_n^2} - x_n = \frac{4}{\sqrt{4+x_n^2}+x_n} > 0$.
La suite est donc strictement croissante.

g) La suite z est clairement positive. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} - z_n = \frac{-z_n}{1+z_n} \leq 0$.
La suite est donc décroissante.

Exercice n° 5

a) On a, pour tout $n > 0$, $\sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}1}}$.
Par opérations, on en déduit $\sqrt{n^2+n} - n \to \frac{1}{2}$.

b) $\sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(n)}$. Comme on sait que $\frac{\ln(n)}{n} \to 0$ on en déduit que $\sqrt[n]{n} \to 1$.

c) On a, pour tout $n > 0$: $\frac{n^2+n\cos n}{n+1} = \frac{n(1+\frac{\cos(n)}{n}}{1+\frac{1}{n}} \to +\infty$.

d) Soit $v = \left(\frac{2+(-1)^n n}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Observons les suites extraites des termes d'indices pairs et d'indices impairs.
— Pour tout entier n on a $v_{2n} = \frac{2+(-1)^{2n}2n}{2n+2} = \frac{2+2n}{2n+2} = 1$.
— Pour tout entier n on a $v_{2n+1} = \frac{2+(-1)^{2n+1}(2n+1)}{2n+1+2} = \frac{2-(2n+1)}{2n+3} = \frac{1-2n}{2n+3} = \frac{-1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{3}{2n}} \to -1$.
La suite v a deux suites extraites qui ont des limites différentes, on en déduit qu'elle diverge.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 6

a) $n \to +\infty$, $n^2 \to +\infty$ et $\dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n} \to 0$

b) $2n \to +\infty$, $n \to +\infty$ et $\dfrac{2n}{n} = 2 \to 2$

c) Impossible. Si $u \to +\infty$ et $v \to +\infty$ alors u et v sont positives à partir d'un certain rang. Cela implique que $\dfrac{u}{v}$ est positif à partir d'un certain rang.

d) $n^2 \to +\infty$, $n \to +\infty$ et $\dfrac{n^2}{n} = n \to +\infty$

e) Impossible, pour des raisons analogues au c).

f) $u = \begin{cases} n \text{ si } n \text{ est pair} \\ n^2 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ a pour limite $+\infty$, $v = (n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$ et $\dfrac{u}{v}$ n'a pas de limite.

Exercice n° 7

a) On a : $\forall x \in [1;2],\ 1 \leq x \leq 2 \Longleftrightarrow 3 \leq x+2 \leq 4 \Longleftrightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{x+2} \leq 2 \Longrightarrow \sqrt{x+2} \in [1;2]$.
Par une récurrence immédiate, on déduit que la suite u est bien définie et que tous ses termes sont dans $[1;2]$.

b) On a : $\forall x \in [1;2],\ f(x) - x = \sqrt{x+2} - x = \frac{-x^2+x+2}{\sqrt{x+2}+x}$.
Le dénominateur est positif, intéressons-nous au numérateur.
Soit $P = -X^2 + X + 2 = -(X+1)(X-2)$. Pour tout $x \in [1;2]$ on a donc $P(x)$ qui est positif, on en déduit que le numérateur de $(\star)$ est positif. Comme $f(x) - x$ est positif sur $[1;2]$ donc la suite est croissante.
u est croissante et majorée par 2, on en déduit qu'elle converge vers un réel $\ell \in [1;2]$.
On demande ensuite la stricte croissance, il suffit de reprendre le raisonnement en vérifiant que l'intervalle $[1;2[$ est stable par f, on en déduit que tous les termes de u sont dans $[1;2[$ et donc que $(\star) > 0$ pour $x \in [1;2[$.

c) La fonction f est définie et continue sur $[-2;+\infty[$, d'après le cours ℓ en est un point fixe. On a :

$$\ell = \sqrt{\ell+2} \Longleftrightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0 \Longleftrightarrow P(\ell) = 0 \Longleftrightarrow \ell \in \{-1;2\}$$

Comme on sait aussi que $\ell \in [1;2]$ on déduit $\ell = 2$.

Exercice n° 8

a) Par opérations, $n\sqrt{n} \to +\infty$.

b) On a, $\forall n > 0, n^4 - n^2 - 1 = n^4(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} \to +\infty$.

c) On a, $\forall n \in \mathbb{N},\ n\cos(\pi n) = n(-1)^n$. Les suites extraites des termes d'indices pairs et impairs ont pour limites $+\infty$ et $-\infty$ respectivement, on en déduit que la suite n'a pas de limite.

d) $((0.3)^n)_n$ et $(\pi^n)_n$ sont deux suites géométriques, la première tend vers 0, la seconde tend vers $+\infty$. Par opérations sur les limites, on a $(0.3)^n - \pi^n \to -\infty$.

e) On a, $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{3n+2^n}{2^n} = \frac{3n}{2^n} + 1$. Montrons que $u = (\frac{3n}{2^n})_n$ est une suite qui converge vers 0.
u est strictement positive à partir du rang 1 et on a :

$$\forall n \geq 2,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{3}{4}$$

On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour $n \geq 2$, on a : $0 \leq u_n \leq u_2(\frac{3}{4})^{n-2}$.
Le théorème des gendarmes permet de conclure que $u \to 0$ et donc que $\frac{3n+2^n}{2^n} \to 1$.

f) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\lfloor n \rfloor}{n} = \frac{n}{n} = 1 \to 1$.

g) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{2n} - 1 \leq \lfloor \sqrt{2n} \rfloor \leq \sqrt{2n} \iff \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\lfloor \sqrt{2n} \rfloor}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{2}$.
Le théorème des gendarmes permet de conclure que $\frac{\lfloor \sqrt{2n} \rfloor}{\sqrt{n}} \to \sqrt{2}$.

h) On a : $\forall n \geq 4,\ \frac{n^3}{n!} = \frac{n^3}{n(n-1)(n-2)} \times \frac{1}{(n-3)!} = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} \times \frac{1}{(n-3)!}$.
$\forall n \geq 4,\ \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} = \frac{1}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})} \to 1$ et $0 \leq \frac{1}{(n-3)!} \leq \frac{1}{n-3}$ permet de déduire que $\frac{1}{(n-3)!} \to 0$.
Finalement, par opérations, $\frac{n^3}{n!} \to 0$.

Exercice n° 9

On considère la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}$.

1. $\forall n \in \mathbb{N}*,\ S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+2)^2} > 0$, la suite S est donc strictement croissante. Cette suit admet donc une limite, finie ou $+\infty$.
2. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et sa courbe représentative pour $x > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ est la surface sous la courbe de f entre les droites verticales $x = k$ et $x = k+1$. Le rectangle construit « à droite », c'est-à-dire entre les points de coordonnées $(k, 0), (k+1, 0), (k+1, \frac{1}{(k+1)^2})$ et $(k, \frac{1}{(k+1)^2})$ a pour surface $\frac{1}{(k+1)^2}$.
Comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, alors le rectangle est inscrit dans l'aire sous la courbe, ce qui donne : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \dfrac{1}{(k+1)^2} < \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.
3. On somme les inégalités obtenues à la question précédente, pour $\in [\![1; n]\!]$ et on obtient :
$$0 < S_n < \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \iff 0 < S_n < \int_1^{n+1} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \iff 0 < S_n < 1 - \frac{1}{n+1}$$
On en déduit que S est une suite croissante et majorée par 1, donc elle converge vers un réel $\ell \leq 1$.

Exercice n° 10

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3} - \dfrac{a_n + 2b_n}{3} = \dfrac{1}{3}(a_n - b_n)$.
$(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géometrique de raison $\frac{1}{3}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n - b_n = \frac{1}{3^n}(a_0 - b_0)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n + b_n}{3} - a_n = -\frac{1}{3}(a_n - b_n) = -\frac{1}{3^{n+1}}(a_0 - b_0) > 0$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
En procédant de façon analogue, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
En utilisant la question 1 on a $a_n - b_n \to 0$, on en déduit que les deux suites sont adjacentes.
Elle convergent donc vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} + \frac{a_n + 2b_n}{3} = a_n + b_n$. La suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante, égale à $a_0 + b_0$.
Par opérations sur les limites, on a : $a_n + b_n \to 2\ell$ ce qui permet de conclure que $\ell = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$.

Exercice n° 11

— $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ donc u est strictement croissante.
— $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$. Cette quantité est négative pour $n \geq 2$, on en déduit que v est décroissante à partir du troisième terme.
— $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n = \frac{1}{n!} \to 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes ; on conjecture que leur limite réelle commune est e.

3 Démontrer les résultats du cours

Exercice n° 12

Pour montrer l'unicité de la limite d'une suite (qui en admet une), on raisonne par l'absurde. Soit u une suite qui admet deux limites différentes ℓ_1 et ℓ_2 dans $\overline{\mathbb{R}}$.

— **Cas 1 :** ℓ_1 est réel, $\ell_2 = +\infty$. Puisque $u \to +\infty$, il existe un rang N à partir duquel tous les termes sont supérieurs à $\ell_1 + 1$.
Or, $u \to \ell_1$, il existe donc un rang N' à partir duquel les termes de la suite sont dans $[\ell_1 - \frac{1}{2}; \ell_1 + \frac{1}{2}]$.
$N + N'$ est un entier supéreur à N et à N', le terme $u_{N+N'}$ doit donc être supérieur à $\ell_1 + 1$ et inférieur à $\ell_1 + \frac{1}{2}$ ce qui est absurde.

— **Cas 2 :** ℓ_1 est réel, $\ell_2 = -\infty$. Alors $-u$ est dans le cas 1, on a donc une absurdité.

— **Cas 3 :** $\ell_1 = +\infty$ et $\ell_2 = -\infty$.
$u \to +\infty$ et donc $\exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow u_n > 0$.
De façon analogue : $u \to -\infty$ et donc $\exists N' \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N' \Longrightarrow u_n < 0$.
$N + N' > N \Longrightarrow u_{N+N'} > 0$ et $N + N' > N' \Longrightarrow u_{N+N'} < 0$ on a donc une absurdité.

— **Cas 4 :** ℓ_1 et ℓ_2 sont des réels différents, mettons $\ell_1 < \ell_2$ et soit $\varepsilon = \frac{1}{10}(\ell_2 - {}_1)$.
Comme $u \to \ell_1$, $\exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow u_n \in [\ell_1 - \varepsilon; \ell_1 + \varepsilon]$. De façon analogue, $u \to \ell_2$ permet d'écrire $\exists N' \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow u_n \in [\ell_2 - \varepsilon; \ell_2 + \varepsilon]$.
$u_{N+N'}$ est dans $[\ell_1 - \varepsilon; \ell_1 + \varepsilon]$ ce qui implique que $u_{N+N'} < \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}$. $u_{N+N'}$ est dans $[\ell_2 - \varepsilon; \ell_2 + \varepsilon]$ ce qui implique que $u_{N+N'} > \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}$; on a donc une contradiction.

Exercice n° 13

Soit u, une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Longleftrightarrow u_n \in [\ell - 1; \ell + 1]$.
Il suit que $M = \text{Max}\{\ell+1, u_0, u_1, \dots, u_N\}$ majore u. De façon analogue, $m = \text{Min}\{\ell-1, u_0, u_1, \dots, u_N\}$ minore u. Finalement, u est bornée.

On prend le maximum et le minimum d'un nombre fini de termes, ce qui est possible.

Exercice n° 14

Soit une suite u qui admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Une suite extraite de u est de la forme $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.
Pour montrer que $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}} \to \ell$, il faut distinguer plusieurs cas, selon que ℓ soit fini ou non. On se limite au cas $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. $u \to \ell$, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Longrightarrow u_n \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$.
Comme ϕ est strictement croissante, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \ \phi(n) \geq n$ ce qui implique que $n \geq N \Longrightarrow \phi(n) \geq N$ et alors $u_{\phi(n)} \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$. Finalement, $u_{\phi(n)} \to \ell$.

Exercice n° 15

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. L'approximation décimale de x par défaut est $\left(\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$; par excès est $\left(\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. On montre facilement que les deux suites précédentes sont adjacenctes. Elles convergent donc vers un même réel qui est x (car il est supérieur aux termes de l'une et inférieur aux termes de l'autre). Tous les termes des deux suites sont décimaux et donc rationnels. Finalement, on a exhibé deux suites de rationnels qui convergent vers le réel x.

4 Plus difficile...

Exercice n° 16

Comme $\sin \leq 1$ on a $\sup \{\sin(n) \ / \ n \in \mathbb{N}\} \leq 1$.

Montrons qu'on a $\sup\{\sin(n)\ /\ n\in\mathbb{N}\}\geq 1$ en créant une suite d'entiers $(a_n)_n$ telle que $\sin(a_n)\to 1$.
Soit $\varepsilon>0$, partageons le cercle trigonométrique $[0;2\pi[$ en secteurs $[0;\varepsilon[,[\varepsilon;2\varepsilon[,\dots,[r\varepsilon;2\pi[$.
L'ensemble $\{a+b2\pi\ /\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}\cap[0;2\pi[$ est infini d'après l'irrationnalité de π donc il existe deux termes $a_1+b_12\pi$ et $a_2+b_22\pi$ qui sont dans le même secteur angulaire. Supposons $a_1+b_12\pi<a_2+b_22\pi$, on a alors $a_2+b_22\pi-(a_1+b_12\pi)=a_2-a_1+(b_2-b_1)2\pi\in[0;\varepsilon[$. Notons $\alpha=a_2-a_1+(b_2-b_1)2\pi$.
La suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ intercepte tous les secteurs, en particulier celui qui contient $\frac{\pi}{2}$: il existe donc $n\alpha$ tel que $|n\alpha-\frac{\pi}{2}|<\varepsilon\iff|a+b2\pi-\frac{\pi}{2}|<\varepsilon$. (En ayant posé $n\alpha=a+b2\pi$ avec $(a,b)\in\mathbb{Z}$).
On vient de prouver que l'on peut approcher $\frac{\pi}{2}$ autant qu'on le souhaite par des nombres de la forme $a+b2\pi$ (avec a,b des entiers). On peut donc créer une suite $(a_n+b_n2\pi)_n$ de nombres de cette forme qui converge vers $\frac{\pi}{2}$. On a alors : $\forall n\in\mathbb{N},\ \sin(a_n)=\sin(a_n+b_n2\pi)\to\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.
Finalement, $\sup\{\sin(n)\ /\ n\in\mathbb{N}\}=1$

Exercice n° 17

Pour $n>1$, soit la fonction $f_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^k-1$.

1. Soit $n>1$. f_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ et donc f_n est strictement croissante.
   Comme $f_n(0)=-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=+\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique et il existe un unique $a_n>0$ tel que $f_n(a_n)=0$.
2. Soit $n>1$. On a $f_{n+1}(a_n)=f_n(a_n)+a_n^{n+1}=a_n^{n+1}>0$.
   Or, on sait que f_{n+1} est strictement croissante et que $f_{n+1}(a_{n+1})=0$, on en déduit donc que $a_{n+1}<a_n$ et donc $(a_n)_n$ est une suite strictement décroissante.
   Comme cette suite est minorée par 0, on en déduit qu'elle converge vers un réel $\ell\geq 0$.
3. Soit $n>1$. $f_n\left(\dfrac{2}{3}\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k-2=\frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}-2=1-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}>\frac{1}{9}>0$ ce qui implique que $a_n<\frac{2}{3}$.
4. On a, pour tout $n>1$, $f_n(\alpha_n)=0\iff\dfrac{1-\alpha_n^{n+1}}{1-\alpha_n}=2\iff\alpha_n^{n+1}=2\alpha_n-1\ \ :(\star)$.
   Comme $\forall n>1,\ \alpha_n<\frac{2}{3}$, on a $\alpha_n^{n+1}\to 0$ et, en passant à la limite dans $(\star)$: $0=2\ell-1\iff\ell=\frac{1}{2}$.

Exercice n° 18

Soit une suite de complexe z vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N},\ z_{n+1}=\frac{z_n+|z_n|}{2}$.
- Si $z_0\in\mathbb{R}^+$, alors la suite est constante.
- Si $z_0\in\mathbb{R}^-$, alors $z_1=0$ et la suite est nulle à partir du deuxième terme.
- Sinon, on fait une figure et on observe d'une part que $(\mathrm{Re}(z_n))_n$ est croissante et majorée par $|z_0|$ et d'autre part que $\mathrm{Im}(z_{n+1})=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(z_n)$ ce qui implique que $(\mathrm{Im}(z_n))_n\to 0$.
  Finalement, $(z_n)_n$ converge vers un réel $\ell<|z_0|$.