Chapitre 8 - Equations différentielles d'ordre 2 - Exercices

Exercice n° 1

1. Reconnaitre, parmi les équations différentielles suivantes, celles qui sont du second ordre linéaires à coefficients constants. Pour celles-là, donner l'équation caractéristique correspondante.

$(E_1) : y' + y^2 = 5t + 1$ $\qquad (E_2) : 2y = y'' + 1$ $\qquad (E_3) : y' + 4y'' - 1 = y$

$(E_4) : 3y'' - y + y' + \ln(3 - 5t) = 0$ $\qquad (E_5) : \frac{2y''-y}{5} = y$ $\qquad (E_6) : \cos(y' + y'') = 5y$

$(E_7) : ty' + y'' = y$ $\qquad (E_8) : \frac{y''}{y} = \mathrm{e}^t$ $\qquad (E_9) : y' = y + \cos t$

2. Résoudre les équations homogènes ci-dessous :

$$(E_1) : y'' + 5y' - y = 0 \qquad (E_2) : 3y'' - y' + 10y = 0 \qquad (E_3) : 4y'' + 4y' + y = 0$$

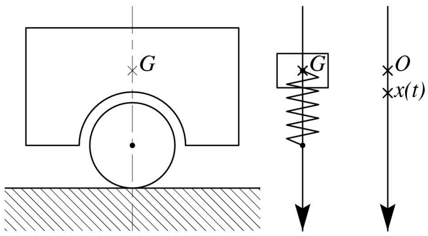
3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} (E_1) : 3y'' + y' = \mathrm{e}^{5t} & \text{avec } y(0) = 10 \text{ et } y'(0) = 2 \\ (E_2) : y'' - 4y = \cos(7t) & \text{avec } y(1) = -5 \text{ et } \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0 \end{array}$$

4. Soit $f(x) = -(4x - 2)\mathrm{e}^{-2x}$. f est-elle solution de $y'' - 3y' + 2y = -4\mathrm{e}^{2x}$?

Exercice n° 2

On étudie la suspension d'une remorque sans amortisseur puis avec amortisseurs.
Le centre d'inertie G de la remorque se déplace sur un axe vertical $(O, \vec{\imath})$ dirigé vers le bas (unité : le mètre) ; il est repéré par son abscisse $x(t)$ en fonction du temps t exprimé en secondes. On suppose que cette remorque à vide peut être assimilée à une masse M $(M > 0)$ reposant sur un ressort fixé à l'axe des roues.



Le point O est la position d'équilibre occupée par G lorsque la remorque est vide.
La remorque étant chargée d'une masse, on enlève cette masse et G se met alors en mouvement. On considère que $t = 0$ au premier passage de G en O.

1) Comprendre la situation

a) Lorsque la masse est dans la remorque, x est positif ? négatif ? nul ?

b) Lorsqu'on enlève la masse, x commence par augmenter ? diminuer ? En déduire le signe de $x'(0)$.

c) Donner l'allure des courbes auxquelles on peut s'attendre dans les cas non-amorti et amorti.

2) Si le mouvement est supposé non-amorti, $x(t)$ vérifie, à tout instant t, $Mx''(t) + kx(t) = 0 \;: (E_1)$ où k désigne la raideur du ressort. On prend : $M = 250kg$ et $k = 6\,250$ N.m^{-1}.

a) On a mesuré $x'(0) = -0,10$ m.s^{-1}. Déterminer $x(t)$.

b) Quelle est la période de cette solution ?

3) On suppose à présent que la remorque est équipée d'amortisseurs de constante d'amortissement λ.
$x(t)$ vérifie $Mx'' + \lambda x' + kx = 0 \;: (E_2)$. On prend : $M = 250kg$, $k = 6\,250$ N.m^{-1} et $\lambda = 1\,500$ N.s.m^{-1}.
Déterminer la solution de (E_2) vérifiant $x'(0) = -0,1$ m.s^{-1}.

Exercice n° 3

Résoudre $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$ en posant $z = xy$.

Exercice n° 4

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(\lambda - x)$. Procédons par analyse-synthèse ; supposons que f est une solution du problème.

1. Montrer que f est dérivable autant de fois que l'on veut.
2. Prouver que f est solution d'une équation différentielle du second ordre.
3. En déduire une expression de f.
4. Conclure.

Exercice n° 5

Trouver les solutions à valeurs complexes du problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' - 2(1+\mathrm{i})y' + 2\mathrm{i}y = x + \mathrm{i} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$.