

Chapitre 8 - Equations différentielles d'ordre 2- Exercices.

Exercice n° 1

1. Reconnaître, parmi les équations différentielles suivantes, celles qui sont du second ordre linéaires à coefficients constants. Pour celles-là, donner l'équation caractéristique correspondante.

$$\begin{array}{lll}
 (E_1) : y' + y^2 = 5t + 1 & (E_2) : 2y = y'' + 1 & (E_3) : y' + 4y'' - 1 = y \\
 (E_4) : 3y'' - y + y' + \ln(3 - 5t) = 0 & (E_5) : \frac{2y'' - y}{5} = y & (E_6) : \cos(y' + y'') = 5y \\
 (E_7) : ty' + y'' = y & (E_8) : \frac{y''}{y} = e^t & (E_9) : y' = y + \cos t
 \end{array}$$

2. Résoudre les équations homogènes ci-dessous :

$$(E_1) : y'' + 5y' - y = 0 \quad (E_2) : 3y'' - y' + 10y = 0 \quad (E_3) : y'' + 2y' - y = 0$$

3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 (E_1) : 3y'' + y' = e^{5t} & \text{avec } y(0) = 10 \text{ et } y'(0) = 2 \\
 (E_2) : y'' - 4y = \cos(7t) & \text{avec } y(1) = -5 \text{ et } y'(1) = 0
 \end{array}$$

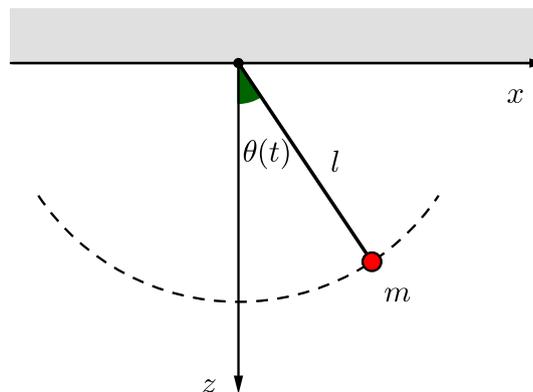
4. Soit $f(x) = -(4x - 2)e^{-2x}$. f est-elle solution de $y'' - 3y' + 2y = -4e^{2x}$?

5. On considère une masse m accrochée au bout d'un fil de longueur l .

Au temps $t = 0$, on lâche le pendule ainsi constitué depuis un angle de 30° et on observe un mouvement oscillant avec l'angle $\theta(t)$ qui varie.

Si on néglige les frottements, en appliquant la conservation de l'énergie mécanique du système on aboutit à l'équation suivante :

$$\theta'' + \frac{mg}{l}\theta = 0.$$



Résoudre cette équation différentielle (dont les conditions initiales sont à trouver dans l'énoncé).

Exercice n° 2

Résoudre $xy'' + 2(x + 1)y' + (x + 2)y = 0$ en posant $z = xy$.

Exercice n° 3

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche les fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R} qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x - \lambda)$. Procédons par analyse-synthèse ; supposons que f est une solution du problème.

1. Montrer que f est dérivable autant de fois que l'on veut.
2. Prouver que f est solution d'une équation différentielle du second ordre.
3. En déduire une expression de f .
4. Conclure.