Correction des exercices du chapitre 8

Exercice n° 1

1. On indique les équations caractéristiques des équations différentielles linéaires du second ordre. Pour les autres, on encadre ce qui n'est pas linéaire.

(E_1) ordre 1, non linéaire $\boxed{y^2}$ $\quad$ $(E_{c2}) : r^2 - 2 = 0$ $\quad$ $(E_{c3}) : 4r^2 + r - 1 = 0$

$(E_{c4}) : 3r^1 + r - 1 = 0$ $\quad$ $(E_{c5}) : \frac{2}{5}r^2 + \frac{4}{5} = 0$ $\quad$ (E_6) non linéaire $\boxed{\cos(y' + y'')}$

(E_7) pas à coefficients constants $\boxed{t}\,y'$ $\quad$ (E_8) non linéaire $\boxed{\dfrac{y''}{y}}$ $\quad$ (E_9) ordre 1

2. On varie la façon de présenter les résultats. Il faut comprendre les trois façons de procéder et être capable de passer de l'une à l'autre.
   — (E_1) a pour solution : $\left\{x \mapsto \lambda e^{\frac{-5+\sqrt{119}}{2}x} + \mu e^{\frac{-5-\sqrt{119}}{2}x} \;/\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
   — (E_2) a pour solutions les fonctions de la forme $f(x) = e^{\frac{1}{6}x}\left(\lambda \cos(\frac{\sqrt{119}}{6}x) + \mu \sin(\frac{\sqrt{119}}{6}x)\right)$ avec λ et μ des réels.
   — $(E_3) : 4y'' + 4y' + y = 0$ a pour solution $\mathrm{Vect}\left(x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x} \;;\; x \mapsto xe^{-\frac{1}{2}x}\right)$.

3. — La solution générale de (E_1) est $\left\{t \mapsto \lambda + \mu e^{-\frac{1}{3}t} + \frac{1}{80}e^{5t} \;/\; (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
   Les conditions initiales $y(0) = 10$ et $y'(0) = 2$ donnent $\lambda = \frac{79}{5}$ et $\mu = -\frac{93}{16}$.

   Finalement, l'unique solution au problème de Cauchy posé est : $t \mapsto \dfrac{79}{5} - \dfrac{93}{16}e^{-\frac{1}{3}t} + \dfrac{1}{80}e^{5t}$.
   — La solution générale de (E_2) est $\left\{t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t} - \frac{1}{53}\cos(7t) \;/\; (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
   La condition $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$ implique que $\lambda = 0$. La condition $y'(1) = 0$ donne $-2\mu - \frac{1}{53}\sin(1) = 0 \iff \mu = \frac{\sin(1)}{106}$.

   Finalement, l'unique solution au problème de Cauchy posé est : $t \longmapsto \frac{\sin(1)}{106}e^{-2t} - \frac{1}{53}\cos(7t)$.

$$\begin{array}{ll} (E_1) : 3y'' + y' = e^{5t} & \text{avec } y(0) = 10 \text{ et } y'(0) = 2 \\ (E_2) : y'' - 4y = \cos(7t) & \text{avec } y(1) = -5 \text{ et } y'(1) = 0 \end{array}$$

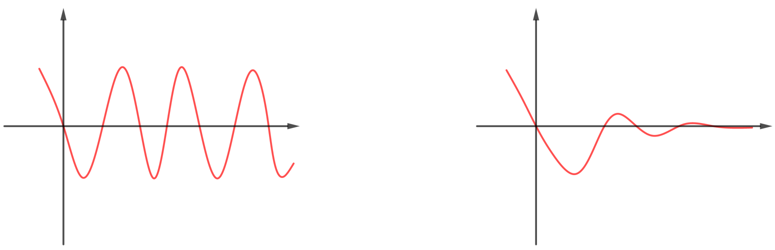
4. On caclule f' et f'' et on constate que $f'' - 3f' + 2f \neq -4e^{2x}$, autrement dit : f n'est pas solution de $y'' - 3y' + 2y = -4e^{2x}$?

Exercice n° 2

1a) Lorsque la masse est dans la remorque, la remorque est plus basse que le point d'équilibre. L'axe est orienté vers le bas donc x est positif.

1b) Lorsqu'on enlève la masse, la remorque remonte et donc x décroit jusqu'à atteindre le point le plus haut, qui correspond à une valeur négative de x. On en déduit $x'(0) < 0$.

1c) Voici les allures des courbes auxquelles on peut s'attendre dans les cas non-amorti et amorti :



2a) La solution générale de (E_1) est $t \mapsto \lambda \cos(\sqrt{\frac{k}{M}}t) + \mu \sin(\sqrt{\frac{k}{M}}t)$ avec λ et μ des réels à fixer.

On a $\sqrt{\frac{k}{M}} = 5$ et les conditions initiales sont $x(0) = 0 \iff \lambda = 0$ et $x'(0) = -0,10 \iff \mu = -0,02$. On a donc $x(t) = -0,02\sin(5t)$.

2b) La période de cette solution est $\frac{2\pi}{5}$.

3) La solution générale de (E_2) est $t \mapsto \mathrm{e}^{-3t}\left(\kappa \cos(4t) + \mu \sin(4t)\right)$ avec κ et μ des réels à fixer.
$x(0) = 0$ et $x'(0) = -0,1$ m.s^{-1} donnent $\kappa = 0$ et $\mu = -0,025$ donc $x(t) = -0,025\mathrm{e}^{-3t}\sin(4t)$.

Exercice n° 3

On pose $z = xy$ ce qui est équivalent à $y = \dfrac{z}{x}$ pour $x \neq 0$. On a $y' = \dfrac{z'x - z}{x^2}$ et $y'' = \dfrac{z''x^2 - 2xz' + 2z}{x^3}$.
Après calculs, y vérifie $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$ donne $z'' + 2z' + z = 0$ soit $z = (\lambda + \mu x)\mathrm{e}^{-x}$ avec λ et μ des réels. On a alors $y = (\dfrac{\lambda}{x} + \mu)\mathrm{e}^{-x}$ pour $x > 0$ et pour $x < 0$.

Cherchons à présent s'il y a une solution sur $\mathbb{R}$. Elle serait de la forme trouvée sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$, autrement dit on aurait $y(x) = \begin{cases} (\frac{\lambda_1}{x} + \mu_1)\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ (\frac{\lambda_2}{x} + \mu_2)\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x < 0 \\ y(0) = ? \end{cases}$
La fonction y doit être deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier elle doit être continue et on doit avoir les limites en 0^+ et 0^- qui soient finies et égales et c'est cette valeur qu'on a pour $y(0)$.
Pour satisfaire ceci, on a forcément $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\mu_1 = \mu_2$.
Les fonctions de la forme $x \mapsto \mu \mathrm{e}^{-x}$ sont donc les dolutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle proposée.

Exercice n° 4

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(\lambda - x)$. Procédons par analyse-synthèse ; supposons que f est une solution du problème.

1. f est dérivable donc $f'(x) = f(\lambda - x)$ est dérivable par composition. Il suit que f est deux fois dérivable, donc f' aussi. Par une récurrence immédiate, on voit que f est dérivable autant de fois que l'on veut.
2. On dérive $f'(x) = f(\lambda - x)$ et on a $f''(x) = -f'(\lambda - x)$. Or, $f'(X) = f(\lambda - X)$ donne $f'(\lambda - x) = f(x)$ en prenant $X = \lambda - x$. Il suit que f est solution de $y'' = -y$.
3. On a donc $f(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$ avec A, B des réels.
4. Soit $f(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$ avec A, B des réels. f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x)$. On a donc $f'(x) = f(\lambda - x)$ si, et seulement si,

$$B\cos(x) - A\sin(x) = \cos(x)(A\cos(\lambda) + B\sin(\lambda)) + \sin(x)(A\sin(\lambda) - B\cos(\lambda))$$

Ces deux polynômes trigonométriques sont égaux si, et seulement si, $\begin{cases} A\cos(\lambda) + B(\sin(\lambda) - 1) = 0 \\ A(\sin(\lambda) + 1) - B\cos(\lambda) = 0 \end{cases}$.

- Si $\cos(\lambda) = 0$ le système devient : $\begin{cases} B(\sin(\lambda) - 1) = 0 \\ A(\sin(\lambda) + 1) = 0 \end{cases}$. et comme $\sin(\lambda) \in \{-1; 1\}$, une des équations disparaît. Si c'est la première qui disparaît on a $A = 0$ avec la seconde et tous les couples $(0; B)$ sont solutions du système. Si c'est la seconde qui disparaît, les couples $(A; 0)$ sont solutions. Dans les deux cas, on a une infinité de fonctions qui conviennent.
- Si $\cos(\lambda) \neq 0$ alors $\sin(\lambda) \neq -1$ et en faisant les opérations $L_2 \leftarrow \cos(\lambda)L_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - (\sin(\lambda)+1)L_1$ le système devient :

$$\begin{cases} A\cos(\lambda) + & B(\sin(\lambda) - 1) & = 0 \\ & B(-\cos^2(\lambda) - \sin^2(\lambda) + 1) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A\cos(\lambda) + B(\sin(\lambda) - 1) = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On en déduit que le système a une infinité de solutions qui sont les couples de la forme $(B\frac{1-\sin(\lambda)}{\cos(\lambda)}; B)$ où B est un réel. Il y a donc une infinité de fonctions qui conviennent, elles sont de la forme $f(x) = B\dfrac{1 - \sin(\lambda)}{\cos(\lambda)}\cos(x) + B\sin(x)$ avec $B \in \mathbb{R}$.

Exercice n° 5

— L'équation homogène $y'' - 2(1+\mathrm{i})y' + 2\mathrm{i}y = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + \mu x \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ avec λ et μ des complexes.
— On cherche une solution particulière affine de l'équation avec second membre, on trouve que $f(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{i}(x+1)$ convient.
— La solution générale de l'équation complète est donc $x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + \mu x \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} - \frac{1}{2}\mathrm{i}(x+1)$.
— Les conditions initiales permettent de fixes ler valeurs des paramètres λ et μ :

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda - \frac{1}{2}\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}\mathrm{i} \quad \text{et} \quad y'(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) + \mu - \frac{1}{2}\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{2}$$

Finalement, la solution du problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} y'' - 2(1+\mathrm{i})y' + 2\mathrm{i}y = x + \mathrm{i} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{array}\right.$ est

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} - \frac{1}{2}\mathrm{i}(x+1)$$