

Chapitre 9 - Matrices - Exercices.

Dans toute cette fiche, n, p et q désignent des entiers naturels non nuls.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 1

Notations, calcul matriciel.

1. Soit p un entier naturel non nul. On considère la matrice M de taille $(3, p)$ telle que :
 - sur la première ligne : les coefficients sont égaux à l'indice de leur colonne ;
 - sur la 2^e ligne : les coefficients valent alternativement 1 puis -1 ;
 - sur la 3^e ligne : les coefficients sont égaux à la somme des coefficients situés au-dessus dans la même colonne

On décide d'appeler les coefficients de M : $m_{i,j}$.

Exprimer $m_{i,j}$ en fonction de i et j .

2. Calculer $M = 3I_3 - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

À l'aide du symbole de Kronecker, donner une expression pour le coefficient $m_{i,j}$ en fonction de i et de j .

3. On considère $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i, j) \in \llbracket 1; 3 \rrbracket \times \llbracket 1; 3 \rrbracket$, $a_{i,j} = 2^{\delta_{i,j}}$. Ecrire A .

4. Effectuer les calculs suivants : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 8 & 0 & -3 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Soit A une matrice $n \times p$. Existe-t-il une colonne X (indépendante de A) telle que :
 - AX soit une colonne égale à la somme de toutes les colonnes d'indice pairs de A ?
 - chaque coefficient de AX soit la moyenne des coefficients de la ligne de A correspondante ?
 - chaque coefficient de AX soit le maximum des coefficients de la ligne de A correspondante ?
6. Effectuer les produits de matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Pour continuer à vous entraîner sur le calcul matriciel : fiche 26 du Cahier de Calcul.

Exercice n° 2

Opérations sur les lignes et les colonnes. Systèmes linéaires.

1. Trouver une suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui prouve que $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ est équivalente à I_2 . En déduire une succession de matrices d'opérations élémentaires $Z_1 \dots Z_k$ telles que $Z_k \dots Z_1 A = I_2$. Que représente la matrice $Z_k \dots Z_1$ pour A ?

2. Trouver une suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui prouve que $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ est équivalente

à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire l'existence d'une colonne B telle que le système $AX = B$ soit incompatible. Donner un exemple d'une telle colonne B .

3. Trouver une suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui prouve que $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ est équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}$ avec α et β des réels à déterminer.

En déduire le nombre de solution de $AX = B$ pour toute colonne B .

4. Résoudre les systèmes $(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} x + y + z = 15 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$ et $(\mathcal{S}_2) : \begin{cases} 3x - 4y + z = 4 \\ 2x + y - z = 8 \\ 5x + z = 3 \end{cases}$.

Pour continuer à vous entraîner sur le calcul matriciel : fiche 15 du Cahier de Calcul.

Exercice n° 3

Inversibilité des matrices.

1. Justifier que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.
2. Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2 Vrai ou faux sur l'ensemble du chapitre

A , B et C désignent des matrices.

- a) Multiplier par une matrice nulle ne donne pas nécessairement une matrice nulle.
- b) Si AB est une matrice carrée alors A et B sont également carrées.
- c) Si B et C sont de même taille et que $AB = AC$ alors $B = C$.
- d) Deux matrices triangulaires supérieures (de même taille) commutent.
- e) Si A est inversible alors $2A$ est inversible.
- f) Si A est inversible alors A^p est inversible pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
- g) Une matrice triangulaire supérieure dont le produit des termes diagonaux est nul n'est pas inversible.
- h) Un système linéaire peut avoir exactement une solution.
- i) Un système linéaire peut avoir exactement deux solutions.
- j) Un système linéaire ayant plus d'inconnues que d'équations ne peut avoir une unique solution.

3 Un peu plus dur

Exercice n° 4

Soit deux matrices élémentaires $E_{i,j}$ et $E_{k,l}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Que vaut $E_{i,j} \times E_{k,l}$?

Exercice n° 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer des expressions de A^n et B^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice n° 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1} .

Exercice n° 7

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

L'objectif de cet exercice est de trouver une expression pour A^n ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Déterminer P^{-1} , la matrice inverse de P .
2. Calculer $P^{-1}AP$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer D^n .
4. En déduire une expression pour A^n ($n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice n° 8

On travaille dans l'espace muni d'un repère orthonormé. Soit $A(3; -2; 0)$.

- a) En utilisant le produit scalaire, déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et orthogonal à $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- b) Résoudre le système : $\begin{cases} 3x + 5y - 3z + 1 = 0 \\ x - 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$ puis interpréter géométriquement le résultat trouvé.

Exercice n° 9

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre le système : $\begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ 3x + 2y + z = a + 3 \\ 7x + 4y - 5z = 2a + 5 \end{cases}$.

Exercice n° 10

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on considère la matrice $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

- (a) Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $A(\theta)A(\varphi)$.
(b) Que vaut $(A(\theta))^n$ pour $n \geq 1$?
(c) $A(\theta)$ est-elle inversible?

- On travaille dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Les vecteurs, exprimés dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, sont représentés en colonnes; on identifie donc l'ensemble $\vec{P}$ des vecteurs du plan à l'ensemble des colonnes à deux lignes.

Soit l'application $f_\theta : \begin{cases} \vec{P} \longrightarrow \vec{P} \\ \vec{u} \longmapsto A(\theta)\vec{u} \end{cases}$.

(On dit que f_θ est l'application linéaire canoniquement associée à $A(\theta)$).

- (a) Quelles sont les images de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ par f_θ .
(b) Justifier que f_θ est linéaire.
(c) Sur une figure, représenter $\vec{i}, \vec{j}, f_\theta(\vec{i})$ et $f_\theta(\vec{j})$, puis interpréter géométriquement l'action de f_θ sur les vecteurs du plan.

4 Plus difficile...

Exercice n° 11

Soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$. Combien existe-t-il de polynômes P de degré 2 qui vérifient $P(1) = a$, $P(2) = b$ et $P(3) = c$?

Exercice n° 12

Définition : Soit A une matrice.

On appelle **noyau** de A , l'ensemble des colonnes X telles que AX est la colonne nulle.

- Le noyau d'une matrice peut-il être vide?
- Prouver que le noyau d'une matrice est stable par combinaison linéaire.
- Déterminer le noyau de $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le noyau soit réduit à la colonne nulle.

Exercice n° 13

Soit $n \geq 3$. Résoudre le système : $\begin{cases} x_1 + x_2 & & & & & = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & & & & & = 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & x_{n-2} + x_{n-1} + x_n & & & = 0 \\ & & x_{n-1} + x_n & & & = 0 \end{cases}$.

Exercice n° 14

Soit $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Prouver que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice n° 15

(D'après Banque PT)

On appelle **trace** d'une matrice carrée A la somme de ses éléments diagonaux ; on note $tr A$.

Par exemple, $tr \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} = 3$. Pour simplifier les choses, on ne place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n = 3$ (il est conseillé d'essayer, dans un second temps, de réfléchir pour $n > 0$ quelconque).

1. Soit A et B deux matrices carrées de même taille. Prouver que $tr(AB) = tr(BA)$.
2. Prouver que la trace est linéaire.
3. S'il en existe, trouver des matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_3$.