Chapitre 9 - Matrices - Exercices.

Dans toute cette fiche, n, p et q désignent des entiers naturels non nuls.

Exercice n° 1

VRAI ou FAUX sur l'ensemble du chapitre.

A, B et C désignent des matrices.

a) Multiplier par une matrice nulle ne donne pas nécessairement une matrice nulle.
b) Si AB est une matrice carrée alors A et B sont également carrées.
c) Si B et C sont de même taille et que $AB = AC$ alors $B = C$.
d) Deux matrices triangulaires supérieures (de même taille) commutent.
e) Si A est inversible alors $2A$ est inversible.
f) Si A est inversible alors A^p est inversible pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
g) Une matrice triangulaire supérieure dont le produit des termes diagonaux est nul n'est pas inversible.
h) Un système linéaire peut avoir exactement une solution.
i) Un système linéaire peut avoir exactement deux solutions.
j) Un système linéaire ayant plus d'inconnues que d'équations ne peut avoir une unique solution.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

Notations, calcul matriciel.

1. Soit p un entier naturel non nul. On considère la matrice M de taille $(3, p)$ telle que :
   - sur la première ligne : les coefficients sont égaux à à l'indice de leur colonne ;
   - sur la 2è ligne : les coefficients valent alternativement 1 puis -1 ;
   - sur la 3è ligne : les coefficients sont égaux à la somme des coefficients situés au-dessus dans la même colonne

   On décide d'appeler les coefficients de M : $m_{i,j}$.
   Exprimer $m_{i,j}$ en fonction de i et j.

2. Calculer $M = 3I_3 - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   À l'aide du symbole de Kronecker, donner une expression pour le coefficient $m_{i,j}$ en fonction de i et de j.

3. On considère $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i, j) \in [\![1; 3]\!] \times [\![1; 3]\!],\ a_{i,j} = 2^{\delta_{i,j}}$. Ecrire A.

4. Effectuer les calculs suivants : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 8 & 0 & -3 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Soit A une matrice $n \times p$. Existe-t-il une colonne X (indépendante de A) telle que :
   — AX soit une colonne égale à la somme de toutes les colonnes d'indice pairs de A ?
   — chaque coefficient de AX soit la moyenne des coefficients de la ligne de A correspondante ?
   — chaque coefficient de AX soit le maximum des coefficients de la ligne de A correspondante ?

6. Effectuer les produits de matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Pour continuer à vous entraîner sur le calcul matriciel : fiche 26 du Cahier de Calcul.

Exercice n° 3

Opérations sur les lignes et les colonnes. Systèmes linéaires.

1. Trouver une suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui prouve que $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ est équivalente à I_2. En déduire une succession de matrices élémentaires $Z_1 \dots Z_k$ telles que $Z_k \dots Z_1 A = I_2$. Que représente la matrice $Z_k \dots Z_1$ pour A ?
2. Trouver une suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui prouve que $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ est équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire l'existence d'une colonne B telle que le système $AX = B$ soit incompatible. Donner un exemple d'une telle colonne B.
3. Trouver une suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui prouve que $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ est équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}$ avec α et β des réels à déterminer.
En déduire le nombre de solution de $AX = B$ pour toute colonne B.
4. Résoudre les systèmes $(\mathcal{S}_1) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 15 \\ x & - & y & + & 2z & = & 5 \end{array} \right.$ et $(\mathcal{S}_2) : \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 3x & - & 4y & + & z & = 4 \\ 2x & + & y & - & z & = 8 \\ 5x & & & + & z & = 3 \end{array} \right.$.

Exercice n° 4

Inversibilité des matrices.

1. Justifier que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.
2. Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 5

Soit deux matrices élémentaires $E_{i,j}$ et $E_{k,l}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Que vaut $E_{i,j} \times E_{k,l}$?

Exercice n° 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer des expressions de A^n et B^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice n° 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Exercice n° 8

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'objectif de cet exercice est de trouver une expression pour A^n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1. Déterminer P^{-1}, la matrice inverse de P.
2. Calculer $P^{-1}AP$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer D^n.
4. En déduire une expression pour A^n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Exercice n° 9

On travaille dans l'espace muni d'un repère orthonormé. Soit $A(3; -2; 0)$.

a) En utilisant le produit scalaire, déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et orthogonal à $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) Résoudre le système : $\begin{cases} 3x + 5y - 3z + 1 = 0 \\ x - 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$ puis interpréter géométriquement le résultat trouvé.

Exercice n° 10

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre le système : $\begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ 3x + 2y + z = a + 3 \\ 7x + 4y - 5z = 2a + 5 \end{cases}$.

Exercice n° 11

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on considère la matrice $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. (a) Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $A(\theta)A(\varphi)$.
   (b) Que vaut $(A(\theta))^n$ pour $n \geqslant 1$?
   (c) $A(\theta)$ est-elle inversible ?
2. On travaille dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   Les vecteurs, exprimés dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, sont représentés en colonnes ; on identifie donc l'ensemble $\vec{P}$ des vecteurs du plan à l'ensemble des colonnes à deux lignes.
   Soit l'application $f_\theta : \begin{cases} \vec{P} \longrightarrow \vec{P} \\ \vec{u} \longmapsto A(\theta)\vec{u} \end{cases}$.
   (On dit que f_θ est l'application linéaire canoniquement associée à $A(\theta)$).
   $A(\theta)$).
   (a) Quelles sont les images de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ par f_θ.
   (b) Justifier que f_θ est linéaire.
   (c) Sur une figure, représenter $\vec{i}, \vec{j}, f_\theta(\vec{i})$ et $f_\theta(\vec{j})$, puis interpréter géométriquement l'action de f_θ sur les vecteurs du plan.

3 Plus difficile...

Exercice n° 12

Soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$. Combien existe-t-il de polynômes P de degré 2 qui vérifient $P(1) = a,\ P(2) = b$ et $P(3) = c$?

Exercice n° 13

> **Définition :** Soit A une matrice.
> On appelle **noyau** de A, l'ensemble des colonnes X telles que AX est la colonne nulle.

1. Le noyau d'une matrice peut-il être vide ?
2. Prouver que le noyau d'une matrice est stable par combinaison linéaire.
3. Déterminer le noyau de $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le noyau soit réduit à la colonne nulle.

Exercice n° 14

Soit $n \geq 3$. Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ & & & \ddots & & & & & & & \vdots \\ & & & & & x_{n-2} & + & x_{n-1} & + \ x_n & = & 0 \\ & & & & & & & x_{n-1} & + \ x_n & = & 0 \end{array}\right.$.

Exercice n° 15

Soit $\in \mathbb{N}^*$. Prouver que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice n° 16

(D'après Banque PT)

On appelle **trace** d'une matrice carrée A la somme de ses éléments diagonaux ; on note $tr\ A$.
Par exemple, $tr \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} = 3$. Pour simplifier les choses, on ne place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n = 3$ (il est conseillé d'essayer, dans un second temps, de réfléchir pour $n > 0$ quelconque).

1. Soit A et B deux matrices carrées de même taille. Prouver que $tr(AB) = tr(BA)$.
2. Prouver que la trace est linéaire.
3. S'il en existe, trouver des matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_3$.