Chapitre 9 - Matrices - Correction des exercices.

Exercice n° 1

a) Faux. Il suffit de faire le calcul.

b) Faux. Si $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ alors AB existe et est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

c) Faux. Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On a B et C de même taille, $AB = AC$ mais $B \neq C$

d) Faux. Par exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ sont deux matrices triangulaires supérieures de même taille. On a $AB \neq BA$.

e) Vrai. Si A est inversible alors $2A \times \frac{1}{2}A^{-1} = I_n$ donc $(2A)$ est inversible et son inverse est $(2A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$.

f) Vrai. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si A est inversible alors $A^p \times (A^{-1})^p = (A \times A^{-1})^p = I_n^p = I_n$. Il suit que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, A^p est inversible et $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$.

g) Vrai. Une matrice est inversible si, et seulement si, elle est équivalente en lignes à I_n. Une matrice triangulaire supérieure dont le produit des termes diagonaux est nul a au moins un zéro sur sa diagonale ; en appliquant l'algorithme de Gauss, on n'aura donc pas n pivots et donc on n'aboutira pas à I_n. Finalement, une matrice triangulaire supérieure dont le produit des termes diagonaux est nul n'est pas inversible.

h) Vrai. Le système $x = 1$ (d'une équation à une inconnue) admet une unique solution.

i) Faux. D'après le cours, un système compatible admet soit une unique solution, soit une infinité.

j) Vrai. Un système linéaire ayant une unique solution correspond à avoir autant de pivots que d'inconnues. Le nombre de pivots étant inférieur ou égal au nombre d'équations, un système qui a plus d'inconnues que d'équations ne peut donc pas avoir une unique solution.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

1. On a $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & p \\ 1 & (-1) & 1 & \dots & (-1)^{p+1} \\ 2 & 1 & 4 & \dots & p + (-1)^{p+1} \end{pmatrix}$.

   On a donc, pour $(i, j) \in [\![1; 3]\!] \times [\![1; p]\!]$, $m_{i,j} = \begin{cases} j \text{ si } i = 1 \\ (-1)^{j+1} \text{ si } i = 2 \\ j + (-1)^{j+1} \text{ si } i = 3 \end{cases}$.

2. Calculer $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = (-2 + 5\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$.

3. On a $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. On a : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 72 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 8 & 0 & -3 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -22 \\ -26 \\ 4 \end{pmatrix}$.

5. Soit A une matrice $n \times p$. Existe-t-il une colonne X (indépendante de A) telle que :
   - AX est une colonne égale à la somme de toutes les colonnes d'indice pairs de A si, et seulement si, $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$.
   - chaque coefficient de AX est la moyenne des coefficients de la ligne de A correspondante si, et seulement si, $X = \frac{1}{p}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$.
   - Il n'est pas possible que chaque coefficient de AX soit le maximum des coefficients de la ligne de A correspondante, indépendamment de A.
     Par exemple, si A est de taille 1×2, il faudrait une colonne X telle que $(1 \quad 0)X = (1)$ et $(0 \quad 1)X = (1)$ ce qui entraîne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cette colonne ne donne pas le maximum pour $A = (-1 \quad 1)$.
6. On a : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$
   et $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ca \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$

Exercice n° 3

1. On applique l'algorithme de Gauss :

$$A \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim} I_2$$

   Chaque opération élémentaire sur les lignes correspond à une multiplication à gauche par une matrice que l'on détermine à l'aide des matrices élémentaires de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   $Z_1 = E_{1,1} + E_{2,2} - E_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   $Z_2 = E_{2,1} + E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   $Z_3 = E_{1,1} + E_{2,2} - 3E_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.
   $Z_4 = E_{1,1} + \frac{1}{5}E_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.
   $Z_5 = E_{1,1} + E_{1,2} + E_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Il suit que $Z_5 Z_4 Z_3 Z_2 Z_1 A = I_2$ et donc que $Z_5 Z_4 Z_3 Z_2 Z_1$ est l'inverse de A.
2. Travaillons directement sur le système $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. On a :

$$AX = B \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - b_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} b_2 - b_3 \\ b_1 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-5L_1}}{\iff}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\\0&-12\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}b_2-b_3\\b_1-2b_2+2b_3\\-5b_2+6b_3\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3+4L_2}{\iff}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\\0&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}b_2-b_3\\b_1-2b_2+2b_3\\4b_1-13b_2+14b_3\end{pmatrix}$$

Si on prend $B=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, le système $AX=B$ est donc équivalent à $\begin{pmatrix}1&2\\0&3\\0&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$ qui est incompatible (puisque sa dernière équation est $0=4$).

Il manque deux opérations élémentaires pour finir de répondre à la première partie de la question : en faisant $L_2\leftarrow\frac{1}{3}L_2$ puis $L_1\leftarrow L_1-2L_2$ on obtient que A est équivalente à $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

3. On a :

$$A\underset{L_1\leftarrow\frac{1}{8}L_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\5&2&6\end{pmatrix}\underset{L_2\leftarrow L_2-5L_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\0&\frac{21}{8}&\frac{33}{8}\end{pmatrix}\underset{L_2\leftarrow\frac{8}{21}L_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\0&1&\frac{11}{7}\end{pmatrix}\underset{L_1\leftarrow L_1+\frac{1}{8}L_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&\frac{5}{28}\\0&1&\frac{11}{7}\end{pmatrix}$$

pour toute colonne B, $AX=B$ est donc équivalent à $\begin{pmatrix}1&0&\frac{5}{28}\\0&1&\frac{11}{7}\end{pmatrix}X=\widehat{B}$ (avec $\widehat{B}$ qui est obtenu en appliquant à B les opérations élémentaires qui ont été appliquées à A) qui a une infinité de solutions, puisqu'il y a deux inconnues principales et un paramètre.

4. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. On a : $(\mathcal{S}_1)\iff\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}15\\5\end{pmatrix}\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}15\\-10\end{pmatrix}$

$\underset{L_2\leftarrow-\frac{1}{2}L_2}{\iff}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}15\\5\end{pmatrix}\underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\iff}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x=10-\frac{3}{2}z\\y=5+\frac{1}{2}z\end{cases}$. Finalement, $(\mathcal{S}_1)$ a une infinité de solutions, de la forme $(10-\frac{3}{2}z,5+\frac{1}{2}z,z)$ pour tout réel z.

De façon analogue : $(\mathcal{S}_2)\iff\begin{pmatrix}3&-4&1\\2&1&-1\\5&0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4\\8\\3\end{pmatrix}\underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\iff}\begin{pmatrix}1&-5&2\\2&1&-1\\5&0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-4\\8\\3\end{pmatrix}$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-5L_1}}{\iff}\begin{pmatrix}1&-5&2\\0&11&-5\\0&25&-9\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-4\\16\\23\end{pmatrix}\underset{L_2\leftarrow\frac{1}{11}L_2}{\iff}\begin{pmatrix}1&-5&2\\0&1&-\frac{5}{11}\\0&25&-9\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-4\\\frac{16}{11}\\23\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+5L_2\\ L_3\leftarrow L_3-25L_2}}{\iff}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{11}\\0&1&-\frac{5}{11}\\0&0&\frac{26}{11}\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}\frac{36}{11}\\\frac{16}{11}\\-\frac{147}{11}\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow\frac{11}{26}L_3}{\iff}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{11}\\0&1&-\frac{5}{11}\\0&0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}\frac{36}{11}\\\frac{16}{11}\\-\frac{147}{26}\end{pmatrix}$$

$\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+\frac{3}{11}L_3\\ L_2\leftarrow L_2+\frac{5}{11}L_3}}{\iff}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}\frac{45}{26}\\-\frac{29}{26}\\-\frac{147}{26}\end{pmatrix}$. Finalement, $(\mathcal{S}_2)$ a pour unique solution $(\frac{45}{26},-\frac{29}{26},-\frac{147}{26})$.

Exercice n° 4

1. On a $\det\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=-2$, la matrice est inversible et son inverse est $\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$.

2. A est inversible si, et seulement si, pour toute colonne $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$, le système $AX=B$ admet une solution, qui est alors $A^{-1}B$. On applique l'algorithme de Gauss :

$$AX=B \underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{pmatrix}1&1&1\\-3&0&5\\2&1&3\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}b_3\\b_2\\b_1\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+3L_1\\L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&3&8\\0&-1&1\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}b_3\\b_2+3b_3\\b_1-2b_3\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\0&3&8\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}b_3\\b_1-2b_3\\b_2+3b_3\end{pmatrix} \underset{L_2\leftarrow -L_2}{\iff} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&3&8\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}b_3\\-b_1+2b_3\\b_2+3b_3\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_2\\L_3\leftarrow L_3-3L_2}}{\iff} \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&11\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}b_1-b_3\\-b_1+2b_3\\3b_1+b_2-3b_3\end{pmatrix} \underset{L_3\leftarrow \frac{1}{11}L_3}{\iff} \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}b_1-b_3\\-b_1+2b_3\\\frac{3}{11}b_1+\frac{1}{11}b_2-\frac{3}{11}b_3\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-2L_3\\L_2\leftarrow L_2+L_3}}{\iff} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}\frac{5}{11}b_1-\frac{2}{11}b_2-\frac{5}{11}b_3\\-\frac{8}{11}b_1+\frac{1}{11}b_2+\frac{19}{11}b_3\\\frac{3}{11}b_1+\frac{1}{11}b_2-\frac{3}{11}b_3\end{pmatrix} \iff X = \begin{pmatrix}\frac{5}{11}b_1-\frac{2}{11}b_2-\frac{5}{11}b_3\\-\frac{8}{11}b_1+\frac{1}{11}b_2+\frac{19}{11}b_3\\\frac{3}{11}b_1+\frac{1}{11}b_2-\frac{3}{11}b_3\end{pmatrix}$$

Le système a donc toujours une solution. Cette solution est $A^{-1}B$, on en déduit $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}5&-2&-5\\-8&1&19\\3&1&-3\end{pmatrix}$.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 5

On travaille dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit (i,j) et (k,l) fixés dans $[\![1;n]\!]^2$.
On a $E_{i,j}\times E_{k,l} = (\delta_{i,r}\delta_{j,s})_{(r,s)\in[\![1;n]\!]^2} \times (\delta_{k,r}\delta_{l,s})_{(r,s)\in[\![1;n]\!]^2}$. Notons C ce produit.

Soit $(r,s)\in[\![1;n]\!]^2$. En position (r,s) dans C on a $\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\delta_{i,r}\delta_{j,t}\times\delta_{k,t}\delta_{l,s}$.

- Si $(i,l)\neq(r,s)$ alors chaque terme de la somme est nulle et donc le coefficient de C est 0.
- Si $(i,l)=(r,s)$ alors la somme devient $\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\delta_{j,t}\times\delta_{k,t}=\delta_{j,k}$.

Finalement, C est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui ne comporte que des zéros, sauf éventuellement en position (i,l) : on a 1 si, et seulement si $j=k$. Autrement dit, $E_{i,j}\times E_{k,l}=\delta_{j,k}E_{i,l}$.

Exercice n° 6

On calcule pour des petites valeurs de n et on conjecture que

$$A^n = \begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = 3^{n-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = 3^{n-1}B.$$

On démontre ensuite sans difficulté ces conjectures par récurrence.

Exercice n° 7

On a $A^3-A=4I_3$. En factorisant à gauche par A il vient $A(A^2-I_3)=4I_3 \iff A\times\frac{1}{4}(A^2-I_3)=I_4$.
A est donc inversible à droite et son inverse à droite est $\frac{1}{4}(A^2-I_3)$.
De façon analogue en factorisant à droite par A on obtient que $\frac{1}{4}(A^2-I_3)$ est l'inverse à gauche de A et donc que A est inversible et que son inverse est $\frac{1}{4}(A^2-I_3)$.

La dernière étape peut être remplacée par un renvoi au cours : l'inversibilité à gauche (ou à droite) implique l'inversibilité.

Exercice n° 8

1. Après calculs, on trouve que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. On a $P^{-1}AP = D$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, une récurrence immédiate donne $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. On a $P^{-1}AP = D \iff A = PDP^{-1}$ puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$ (par une récurrence immédiate). On conclut en faisant le calcul qui donne $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 2^{n+1} - 1 & 2(1 - 3^n) & 2^n \end{pmatrix}$.

Exercice n° 9

Soit $A(3; -2; 0)$.

a) Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et orthogonal à $\vec{n}$. Pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace on a :

$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Comme on travaille dans un repère orthonormé, le produit scalaire se calcule facilement avec les coordonées et on a :

$$M \in \mathcal{P} \iff \begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \iff 3(x-3) + 5(y+2) - 3z = 0 \iff 3x + 5y - 3z + 1 = 0$$

b) On a : $\left\{ \begin{array}{r} 3x + 5y - 3z + 1 = 0 \\ x - 2y + z - 4 = 0 \end{array} \right. \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{r} 11y - 6z + 13 = 0 \\ x - 2y + z - 4 = 0 \end{array} \right. \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{11}L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{r} y - \frac{6}{11}z + \frac{13}{11} = 0 \\ x - 2y + z - 4 = 0 \end{array} \right.$

$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} y - \frac{6}{11}z + \frac{13}{11} = 0 \\ x - \frac{1}{11}z - \frac{18}{11} = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{6}{11}z - \frac{13}{11} \\ x = \frac{1}{11}z + \frac{18}{11} \end{array} \right.$.

Le système a une infinité de solutions, de la forme $(\frac{1}{11}z + \frac{18}{11}, \frac{6}{11}z - \frac{13}{11}, z)$ avec $z \in \mathbb{R}$.

Cet ensemble est une équation paramétrique de droite, elle correspond à l'intersection de $\mathcal{P}$ avec le plan d'équation cartésienne $x - 2y + z - 4 = 0$.

Exercice n° 10

Le système proposé correspond à l'équation matricielle $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ a+3 \\ 2a+5 \end{pmatrix}$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On applique l'algorithme de Gauss avec, par exemple, la suite d'opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_1 \leftrightarrow L_2$, $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1$, $L_2 \leftarrow -L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$.

On obtient l'équation équivalente : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 \\ -a+6 \\ -a+2 \end{pmatrix}$ et il y a alors deux possibilités :

— Si $a \neq 2$ alors le système est incompatible ;

— Sinon, $a = 2$ le système est compatible et admet une infinité de solutions qui sont de la forme $(-1 + 7z, 4 - 11z, z)$ avec $z \in \mathbb{R}$.

Exercice n° 11

Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$.

1. (a) On calcule et on observe que $A(\theta)A(\varphi) = A(\theta+\varphi)$.
   (b) Avec la première question, une récurrence immédiate donne : $\forall n \geq 1\, (A(\theta))^n = A(n\theta)$.
   (c) Comme $I_2 = A(0)$, la première question donne $I_2 = A(\theta+(-\theta)) = A(\theta)A(-\theta)$ ce qui prouve que $A(\theta)$ est inversible et que son inverse est $A(\theta)^{-1} = A(-\theta)$.
2. On travaille dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   Les vecteurs, exprimés dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, sont réprésentés en colonnes ; on identifie donc l'ensemble $\overrightarrow{P}$ des vecteurs du plan à l'ensemble des colonnes à deux lignes.
   Soit l'application $f_\theta : \begin{cases} \overrightarrow{P} \longrightarrow \overrightarrow{P} \\ \vec{u} \longmapsto A(\theta)\vec{u} \end{cases}$.
   (On dit que f_θ est l'application linéaire canoniquement associée à $A(\theta)$).
   $A(\theta)$).
   (a) $\vec{i}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Son image par f_θ est donc $A(\theta) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ c'est-à-dire le vecteur $\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$.
   De façon analogue, l'image de $\vec{j}$ par f_θ est $-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$.
   (b) Appliquer f_θ c'est faire un produit matriciel. Le produit matriciel est linéaire donc f_θ l'est aussi. Comme tout vecteur du plan est de la forme $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ on a $f_\theta(\vec{u}) = f_\theta(x\vec{i} + y\vec{j}) = xf_\theta(\vec{i}) + yf_\theta(\vec{j})$.
   (c) À l'aide d'une figure, on comprend que f_θ correspond à la rotation vectorielle d'angle θ.

3 Plus difficile...

Exercice n° 12

— Si $a = b = c$ alors les points $(1, a), (2, b)$ et $(3, c)$ sont alignés sur la droite $y = a$ et il n'y a pas de parabole à passer par ces trois points. (S'il y en avait une, d'équation $y = P(x)$ avec P de degré 2 alors $P - a$ aurait trois racines : 1,2 et 3 ce qui est absurde).

— Si $b = \frac{a+c}{2}$ alors les points sont encore alignés, sur une droite non horizontale (d) et il n'y a pas de parabole à passer par ces trois points. (S'il y en avait une, d'équation $y = P(x)$, en prenant une équation réduite de (d) : $y = \alpha x + \beta$ alors $P - (\alpha X + \beta)$ est un polynôme de degré 2 qui s'annule en 1, 2 et 3, ce qui est absurde).

— Sinon, on cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ tel que $P(x) = \alpha X^2 + \beta x + \gamma$ vérifie $\begin{cases} P(1) = a \\ P(2) = b \\ P(3) = c \end{cases}$.

Ce système revient à l'équation matricielle $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ que l'on pourrait résoudre directement mais, en changeant l'ordre des inconnues, on obtient : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On applique l'algorithme de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ c-a \end{pmatrix}.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ c+a-2b \end{pmatrix}.$$

Ce dernier système est compatible et a autant de pivots que d'inconnues, il admet donc une unique solution. Autrement dit : il existe un unique polynôme de degré 2 qui satisfait les conditions requises.

Question : à quoi servaient les deux premiers cas ? Si on les omet le travail réalisé ensuite reste correct, non ?

Exercice n° 13

Soit A, une matrice de taille $n \times p$. Dans la suite, on note 0_n et 0_p les colonnes de 0 à n et p lignes, respectivement

1. $A \times 0_p = 0_n$ donc 0_p est dans le noyau de A, qui n'est donc pas vide.
2. Soit X et Y deux colonnes à n lignes qui sont dans le noyau de A. Pour tous scalaires λ et μ on a $A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY = \lambda 0_n + \mu 0_n = 0_n$ donc $\lambda X + \mu Y$ est dans le noytau de A. Finalement, le noyau de A est donc stable par combinaison linéaire.
3. Déterminer le noyau de $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ c'est résoudre l'équation matricielle $AX = 0_n$ que l'on résout avec l'algorithme de Gauss :
$$AX = 0_n \iff \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} X = 0_n \iff \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -22 & 4 \\ 0 & -11 & 2 \end{pmatrix} X = 0_n \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{11} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0_n$$
Finalement, le noyau de A est l'ensemble des colonnes de la forme $z \begin{pmatrix} -\frac{8}{11} \\ \frac{2}{11} \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $z \in \mathbb{R}$.
4. Determiner le noyau de A c'est résoudre le système homogène $AX = 0_n$. Ce système a une unique solution (la colonne nulle) si, et seulement si, A est équivalente à I_n.

Exercice n° 14

Le système est homogène et donc compatible.
Procédons par analyse-synthèse. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une solution du système.
La première équation donne $x_2 = -x_1$. L'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $x_3 = 0$.
La troisième équation $x_2 + x_3 + x_4 = 0$ devient $-x_1 + x_4 = 0 \iff x_4 = x_1$.
En procédant ainsi de suite, on obtient que $(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, -x_1, 0, x_1, -x_1, 0 \ldots)$.
La dernière inconnue x_n est alors :
- 0 si n est multiple de 3. La dernière équation du système donne $x_{n-1} + x_n = 0 \iff -x_1 = 0$ et la solution est $(0, \ldots, 0)$.
- x_1 si n est de la forme $3k+1$. La dernière équation du système donne $x_{n-1}+x_n = 0 \iff 0+x_1 = 0$ et la solution est $(0, \ldots, 0)$.
- $-x_1$ si n est de la forme $3k + 2$. La dernière équation du système donne $x_{n-1} + x_n = 0 \iff x_1 - x_1 = 0$ qui est toujours vraie. La solution est $(x_1, -x_1, \ldots 0, x_1, -x_1)$.

Synthèse : la solution nulle est toujours une solution du système. On vérifie que si n est de la forme $3k + 2$ alors $(\lambda, -\lambda, 0, \ldots, \lambda, -\lambda)$ est bien solution du système.

Remarque : si on veut dire rigoureusement les choses (plutôt qu'avec « ainsi de suite »), on peut procéder ainsi : pour tout $k \in [\![1; n-4]\!]$, le système comporte les équations $x_k + x_{k+1} + x_{k+2} = 0$ et $x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3} = 0$. En les soustrayant on obtient $x_k = x_{k+3}$ et donc la suite finie $(x_1, \ldots, x_n)$ est périodique de période 3. Les deux premières équations donnent $x_3 = 0$ et $x_2 = -x_1$.

Exercice n° 15

Soit $\in \mathbb{N}^*$. On procède par analyse-synthèse.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, S et A des matrices symétrique et antisymétrique telles que $M = A + S$. En transposant, on obtient $M^T = A^T + S^T \iff M^T = A - S$. En additionnant et en soustrayant les deux

équations, il vient $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$.

Synthèse : on vérifie que, ainsi définies, on a S qui est symétrique, A qui est antisymétrique et que $M = A + S$.

Exercice n$^{\text{o}}$ 16

1. Il suffit de calculer.
2. Il suffit de calculer.
3. D'après les questions précédentes, on a pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA) = tr(AB) - tr(AB) = 0$. Or, $tr(I_3) = 3$ donc il n'est pas possible d'avoir $AB - BA = I_3$.