E3A PSI 2018 mathématiques 1

—

Corrigé

Exercice 1 (original exo 2)

1. • Puisque $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments, la somme $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ est égale au nombre total de parties d'un ensemble à n éléments, c'est-à-dire 2^n.

• Par la formule du binôme, $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$.

2. Les événements $A_{i,j}=[X=i]\cap[Y=j]$, pour $(i,j)\in[\![1;n+1]\!]^2$, forment un système complet d'événements, donc $\sum\limits_{(i,j)\in[\![1;n+1]\!]^2}\mathbb{P}(A_{i,j})=1$.

Or par **1**, $\sum\limits_{(i,j)\in[\![1;n+1]\!]^2}\mathbb{P}(A_{i,j})=\sum\limits_{i=1}^{n+1}\sum\limits_{j=1}^{n+1}\alpha\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}=\alpha\sum\limits_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\sum\limits_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}=\alpha 4^n$. Donc $\alpha=\frac{1}{4^n}$.

3. • Par formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $([Y=j])_{j\in[\![1;n+1]\!]}$, on a :

$\forall\, i\in[\![1;n+1]\!],\ \mathbb{P}(X=i)=\sum\limits_{j=1}^{n+1}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])=\frac{\binom{n}{i-1}}{4^n}\sum\limits_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}=\frac{\binom{n}{i-1}}{2^n}$.

• Par symétrie, $\forall\, j\in[\![1;n+1]\!]$, $\mathbb{P}(Y=j)=\frac{\binom{n}{j-1}}{2^n}$.

• Ainsi $\forall\,(i,j)\in[\![1;n+1]\!]^2$, $\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])\frac{\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}}{4^n}=\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}Y=j)$.
Les variables X et Y sont donc indépendantes.

4. La variable $Z=X-1$ est à valeurs dans $[\![0;n]\!]$ et $\forall\, k\in[\![0;n]\!]$, $P(Z=k)=P(X=k+1)=\binom{n}{k}\frac{1}{2^k}$.
Donc Z suit la loi binomiale de paramètres n et $p=\frac{1}{2}$. En particulier, $\mathbb{E}(Z)=\frac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(Z)=\frac{n}{4}$.
On en déduit par linéarité de l'espérance que $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Z)+1=\frac{n}{2}+1$, et par la formule donnant la variance d'une transformation affine que $\mathbb{V}(X)=\mathbb{V}(Z)=\frac{n}{4}$.

5. • Par définition des coefficients binomiaux, les parties de A de cardinal r sont au nombre de $\binom{p+q}{r}$.

• Partitionnons A en deux parties A_1 et A_2 de cardinal p et q respectivement.
Pour tout $k\in[\![0;r]\!]$, le nombre de parties de A de cardinal r et comportant exactement k éléments de A_1 (et donc $r-k$ éléments de A_2) est égal à $\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}$, puisqu'il y a autant de telles parties que de couples constitués d'une partie de A_1 de cardinal k et d'une partie de A_2 de cardinal $r-k$.
Ainsi, la somme $\sum\limits_{k=0}^{r}\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}$ est égale au nombre total de parties de A de cardinal r.

L'égalité demandée résulte de la comparaison des résultats des deux points précédents.

6. Le cas $p=q=r=n$ dans l'égalité de **5** donne $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$, puisque $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

7.1. Les colonnes de la matrice B sont toutes non nulles et proportionnelles à la colonne des coefficients binomiaux $\binom{n}{i-1}$ pour $1\leqslant i\leqslant n+1$, donc $\mathrm{rg}(B)=1$.

7.1. On a $\mathrm{Tr}(B)=\sum\limits_{i=1}^{n+1}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=i])=\frac{1}{4^n}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}^2=\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ par **6**.