Révisions de Probabilités

Exercice 1 : On considère des codes formés de 7 chiffres (entre 0 et 9). Combien peut-on composer de tels codes ? Combien ont 7 chiffres distincts ? Combien ont deux chiffres 1, deux chiffres 3 et trois chiffres 7 ? Combien contiennent exactement trois 1 ? Pour combien d'entre eux la somme des trois premiers chiffres est-elle égale à 5 ?

Exercice 2 : On considère les 16 figures d'un jeu de cartes (as, rois, dames, valets). Six personnes pensent chacune à une carte. Quelle est la probabilité qu'elles pensent toutes à la même carte ? que 4 exactement pensent à la même carte et les deux autres à deux autres cartes distinctes ?

Exercice 3 : Un horticulteur a mis au repos au début de l'hiver 15 bulbes de dahlias sans les étiqueter : 6 à fleurs rouges, 4 à fleurs blanches et 5 à fleurs violettes. Au printemps, il en plante 6 au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir planté 6 dahlias rouges ? 2 de chaque couleur ? au moins 2 blancs ?

Exercice 4 : Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 8 en lançant trois dés ?

Exercice 5 : Soit un ensemble E à n éléments. Combien existe-t-il de couples (A, B) de parties de E tels que $A \cap B = \emptyset$? tels que $A \cup B = E$?

Exercice 6 : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $5k$ boules blanches et $3k$ boules rouges.

1. On tire 3 boules de l'urne successivement au hasard et en remettant la boule tirée après chaque tirage. Montrer que la probabilité d'obtenir plus de rouges que de blanches est indépendante de k.
2. On tire simultanément et au hasard 3 boules. Calculer la probabilité $p(k)$ d'obtenir plus de rouges que de blanches. Etudier la limite de $p(k)$ lorsque k tend vers l'infini. Commenter.

Exercice 7 : Une population possède une proportion $p \in]0, 1[$ de tricheurs. Lorsque l'on fait tirer une carte d'un jeu de 52 cartes à un tricheur, il retourne à coup sûr un as. Exprimer en fonction de p la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population retourne un as.

Exercice 8 : On considère deux événements indépendants A et B de probabilités respectives 1/4 et 1/3.
Quelle est la probabilité qu'un seul des deux événements ait lieu ?

Exercice 9 : On lance deux dés, un noir et un blanc. Soient $A =$ "le chiffre du dé noir est pair", $B =$ "le chiffre du dé blanc est impair" et C=" les deux chiffres ont la même parité". Montrer que les événements A, B, C sont deux à deux indépendants. Sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 10 : Une urne contient 3 pièces équilibrées dont l'une, truquée, a 2 côtés Face. On prend une pièce au hasard, avec laquelle on effectue n lancers.
Quelle est la probabilité de l'événement F_n : "obtenir n Faces au cours des n lancers" ?
Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée si F_n se réalise ? Préciser sa limite quand n tend vers l'infini.
Quelle est la probabilité de détecter une pièce honnête lors des n lancers ? Préciser sa limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 11 : Le quart d'une population est vacciné contre la grippe. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné contre 4 non vaccinés.

1. Le vaccin a-t-il une efficacité quelconque ?
2. On sait qu'il y a un malade sur 12 parmi les vaccinés. Quelle est la probabilité de tomber malade pour une personne non vaccinée ?

Exercice 12 : On considère un carré $ABCD$ de centre O. Un jeton, placé initialement en A, se déplace au hasard, le long d'un côté ou d'une diagonale, d'un point à un point voisin. On suppose les déplacements indépendants. On note O_n l'événement : "le jeton arrive en O après le n-ième pas" (resp. A_n, B_n, C_n, D_n).
Expliciter les probabilités des événements O_2, A_2, B_2, C_2, D_2.
On note : $p_n = P(O_n)$. Ecrire p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et préciser sa limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 13 :
On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de X, calculer son espérance.
2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y, et son espérance.

Exercice 14 :
On lance n fois une pièce parfaitement équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de piles que de faces ?

Exercice 15 :
Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

1. Déterminer $P(X = Y)$.
2. Déterminer $P(X \geqslant Y)$.
3. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 16 :
Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, N\}$. Démontrer que

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} P(X > n).$$

Exercice 17 : On lance deux dés équilibrés. On note R_1 et R_2 les variables aléatoires correspondant aux deux résultats. On note $X = \min(R_1, R_2)$ et $Y = \max(R_1, R_2)$.
1. Déterminer la loi de X et son espérance.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de R_1 et R_2.
3. Exprimer XY en fonction de R_1 et R_2. En déduire $E(XY)$. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 18 : Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On tire au hasard deux boules successivement et sans remise d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note Z la variable aléatoire égale au plus grand des deux numéros obtenus.
Pour $k \in \{1, \cdots, n\}$, calculer $P(Z \leqslant k)$. En déduire la loi de Z.

Exercice 19 : Calculer l'espérance et la variance d'une loi binomiale par deux méthodes.

Exercice 20 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \cdots, n\}$, telle que :

$$\forall k \in \{0, \cdots, n\},\ P(X = k) = a\frac{\binom{n}{k}}{n+1}.$$

1. Déterminer a en fonction de n.
2. Vérifier que pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$.
3. Calculer l'espérance de X, l'espérance de $X(X+1)$ et la variance de X.

Exercice 21 : Soit $p \in]0, 1[$. Une puce se déplace sur un axe d'origine O, en partant de O, par sauts d'une unité vers la droite avec une probabilité égale à p et d'une unité vers la gauche avec une probabilité égale à $1 - p$, les sauts étant supposés indépendants. Soit X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du point où se trouve la puce après n sauts. Préciser la loi de X_n, son espérance et sa variance.

Exercice 22 : Soient n et p dans $\mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, déterminer le nombre de parties de $[\![1, n+p+1]\!]$ ayant $p+1$ éléments et dont le maximum est $p+k$.
En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{p}$.

Exercice 23 : Expliciter une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ et une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$. Pour le 2ième cas, on se contentera d'une visualisation graphique en représentant $\mathbb{N}^2$ par un quadrillage.

Exercice 24 : Vérifier que l'on définit une loi de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ en posant :
$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Quelle est la probabilité de l'ensemble des entiers pairs ? de l'ensemble des multiples de k (k fixé dans $\mathbb{N}$) ?

Exercice 25 : Deux personnes jouent avec un dé équilibré. A commence et lance le dé. S'il obtient 1 ou 2, il gagne. Sinon, le tour passe à B. S'il obtient 3, 4 ou 5, B gagne. Sinon le tour revient à A et la partie se poursuit tant qu'aucun joueur n'a gagné.
On note A_k l'événement : "le joueur A effectue son k-ième lancer et gagne". Calculer la probabilité de A_k. En déduire la probabilité pour que A gagne.
Calculer de même la probabilité pour que B gagne.
Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

Exercice 26 : Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Traduire avec les opérations ensemblistes les événements suivants :

1. Tous les événements $A_n, n \geqslant 0$ sont réalisés.
2. Tous les événements $A_n, n \geqslant 0$ sont réalisés à partir d'un certain rang.
3. Seul un nombre fini des événements $A_n, n \geqslant 0$ sont réalisés.

Exercice 27 : Existe-t-il $a \in \mathbb{R}$ tel que l'on puisse définir une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = (ak+1)e^{-k}$?

Exercice 28 : Calculer la probabilité que X prenne une valeur paire lorsque X suit la loi géométrique de paramètre p ; lorsque X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 29 : Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X > k+1) = \dfrac{1}{2}P(X > k)$.
Déterminer la loi de X.

Exercice 30 : X suit une loi géométrique de paramètre p. On pose $Y = 0$ si X est impair et

$Y = \dfrac{X}{2}$ si X est pair. Montrer qu'on définit ainsi une variable aléatoire Y et déterminer sa loi. Calculer l'espérance de Y si elle existe.

Exercice 31 : Vérifier que l'on définit la loi de probabilité d'une v.a. X en posant :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \dfrac{1}{n2^n \ln 2}$. Calculer $E(X)$ si elle existe.

Exercice 32 : X suit une loi de Poisson de paramètre λ. On pose : $Z = \dfrac{1}{2+X}$.
Montrer que Z admet une espérance que l'on calculera.

Exercice 33 : Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On définit le moment d'ordre r d'une v.a. X en posant : $\mu_r = E(X^r)$, si cette espérance existe. Montrer que, si X admet un moment d'ordre r, alors pour tout entier $s \in [\![1, r]\!]$, X admet un moment d'ordre s.

Exercice 34 : Une urne contient 4 boules : 1 blanche et 3 rouges.
On effectue au hasard des tirages successifs avec remise d'une boule dans l'urne jusqu'à obtenir pour la première fois deux boules consécutives de même couleur. On note X la v.a. égale au nombre de tirages effectués.
1. Calculer $P(X = 3)$ et $P(X = 4)$.
2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$, $P(X = 2m) = \dfrac{5}{8}\left(\dfrac{3}{16}\right)^{m-1}$ et $P(X = 2m+1) = \left(\dfrac{3}{16}\right)^{m}$.
3. Vérifier qu'il est quasi-certain que l'on obtienne deux boules de même couleur (ce qui justifie a posteriori la définition de X).
4. Montrer que X admet une espérance finie et calculer $E(X)$.

Exercice 35 : Soient X_1 et X_2 2 v.a. indépendantes de même loi : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X_i = k) = \dfrac{1}{2^{k+1}}$.
Déterminer la fonction de répartition puis la loi de : $Y = \sup(X_1, X_2)$.

Exercice 36 : On lance un dé équilibré n fois et on note S_n la moyenne des points obtenus. Calculer l'espérance et la variance de S_n.
Déterminer un entier n_0 tel que : $P\left(\left|S_{n_0} - \dfrac{7}{2}\right| > \dfrac{1}{2}\right) < 0,05$.

Exercice 37 : Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p.
1. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, E_n l'événement "S_n est pair" et $u_n = P(E_n)$.
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire u_n en fonction de n puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n = X_n X_{n+1}$ et pour $n > 0$: $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
a) Calculer l'espérance et la variance de Z_n.
b) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|Z_n - p^2\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.