Exercice

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1. On note E l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle ., . \rangle$:

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \ \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

On note $\|.\|$ la norme associée et $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de E.

1. Soit M une matrice dans $M_n(\mathbb{R})$. On note $v_1, \ldots, v_n$ ses vecteurs colonnes.
   (a) Exprimer en fonction des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ les coefficients de la matrice ${}^tMM$.
   (b) Dans le cas particulier où les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ sont orthogonaux deux à deux, démontrer que
   $$|\det(M)| = \|v_1\|\|v_2\| \ldots \|v_n\|$$
2. Déterminer les matrices dans $M_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonales et orthogonales.

On note $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices M dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que :

— tous les coefficients de M sont dans $\{-1, 1\}$

— les vecteurs colonnes de la matrice M sont orthogonaux deux à deux

Par exemple, on pourra constater que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2 \ \text{ et } \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_4$$

3. Ecrire une fonction en Python qui lorsqu'elle prend en entrée la liste des colonnes d'une matrice M, de taille n, renvoie 1 si la matrice est dans $\mathcal{H}_n$ et 0 sinon.
4. Soit $M \in \mathcal{H}_n$.
   (a) Quelle est la norme d'un vecteur colonne de M ?
   (b) Que vaut $|\det(M)|$?
5. Soit $M \in \mathcal{H}_n$. On suppose que le premier vecteur colonne de M est le vecteur
   $$v_1 = \sum_{i=1}^{n} e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$
   Soit, pour i dans $[\![2, n]\!]$, $v_i = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{j,i} e_j$ le i-ième vecteur colonne de M. Démontrer que le nombre des $m_{j,i}$ égaux à 1 est égal au nombre de $m_{j,i}$ égaux à -1.
6. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est non vide. Démontrer que $\mathcal{H}_n$ contient une matrice M_0 dont la première colonne est le vecteur $v_1 = \sum_{i=1}^{n} e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
7. Lorque $\mathcal{H}_n$ est non vide, que peut-on dire de la parité de n ?
8. On suppose $n > 2$ et $\mathcal{H}_n$ non vide. Soit M_0 une matrice dans $\mathcal{H}_n$ dont la première colonne est le vecteur $v_1 = \sum_{i=1}^{n} e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que $\det(M_0)$ est un entier relatif multiple de 2^{n-1}.
   (b) Démontrer que n est un entier naturel multiple de 4.