Chapitre 1 - Exercices

1 Logique, notations mathématiques

Exercice n° 1

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \Longrightarrow x \leq 3$

b) $\exists x \in \mathbb{R}^+ / x < \sqrt{x}$

c) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2\ x < y \Longrightarrow |x| < |y|$

d) $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}/n^2 > N$

Exercice n° 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ecrire avec le formalisme mathématiques les propriétés suivantes de f.

a) L'image de 5 par f est 2.

b) 5 est l'unique antécédent de 2 par f.

c) $f(x) = 0$ admet des solutions.

d) f admet un maximum.

e) f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 3

1. Parmi les fonctions de référence : cos, sin, ln, exp, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^2$ quelles sont-celles qui vérifient les propriétés suivantes ($\mathcal{D}$ est le domaine de définition de la fonction f).

   a) $f(0) \in \{0; 1\}$

   b) $\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \geq 0$

   c) $\exists A \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathcal{D}, f(x) < A$

   d) $\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2,\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$

2. Exprimer les négations des propriétés ci-dessus.

2 Calculer dans $\mathbb{R}$

Exercice n° 4

Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les expressions suivantes :

$A = 3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 6 \times 3^{n-2}$; $B = \frac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4}$; $C = \frac{4^n 3^{2n} - 1}{2^n 3^n + 1}$; $D = \frac{16^{n+1} + (-4)^{2n+1} + (-2)^{4n}}{8^n}$.

Exercice n° 5

Soit x et y, des complexes.

a) Développer les expressions : $A = (x^3 - 1)^2$; $B = (x - 3y^5)(x + 3y^5)$; $C = (x + y)^3$.

b) Factoriser au maximum les expressions : $D = x^7 y^2 + 5y^3 x$; $E = x^4 + 4x^2 + 4$; $F = xy - xy^3$.

Exercice n° 6

Soit $(a_i)_{i \in [\![0;3]\!]} \in \mathbb{R}^4$ et $(b_i)_{i \in [\![0;3]\!]} \in \mathbb{R}^4$. Soit la fonction $P(x) = \left(\sum_{i=0}^{3} a_i x^i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{3} b_j x^j\right)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) De tête, savez-vous donner le degré de $P(x)$ ainsi que son coefficient dominant ?

b) Développer $P(x)$ et donner ses coefficients.

Exercice n° 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

— **Niveau 1** $(E_1) : \frac{7t+1}{3} = \frac{2t-5}{\sqrt{3}}$; $(E_2) : (x-3)(7-5x) = 0$; $(E_3) : |5 - x| = -1$.

- **Niveau 2** $(E_4) : (2x-3)^2 = 4$; $(E_5) : x^2 - x = (3x^2+1)(x-1)$; $(E_6) : |\pi - 2x| = 5$.
- **Niveau 3** $(E_7) : t^4 + t^2 + 1 = 0$; $(E_8) : x^3 = x^2 + x - 1$; $(E_9) : |x| = |x^2 + x - 3|$.

Exercice n° 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- **Niveau 1** $(I_1) : x + 2 < 7x - 3$; $(I_2) : (Y+3)(Y-1) \geq 0$; $(I_3) : |3 - x| < \sqrt{2}$.
- **Niveau 2** $(I_4) : (2x+1)(x^2 - 3x - 2) \geq 0$; $(I_5) : \frac{2x^2+x-1}{3x^2-x-7} \geq 0$; $(E_6) : |\pi - 2x| > 5$.

Exercice n° 9

1. Trouver une équation dont la solution est $\{1; 2\}$. En trouver une autre.
2. Trouver une inéquation dont la solution est $[3; 5]$. En trouver une autre dont la solution est $[3; 5[$.
3. Soit a et b des éléments de $[2; 3]$. Donner les meilleurs encadrements possibles pour les nombres $7a + 1$; $a^2 - 3b$ et $\frac{a+1}{b-1}$.

Exercice n° 10

Corrriger les éventuelles erreurs du raisonnement suivant :

Soit un réel $x \in [-2; 4[$. On a clairement $0 \leq |x| < 4$ et donc $3 \leq |x| + 3 < 7$. Par ailleurs, toujours car $x \in [-2; 4[$, on a : $x^2 \in [4; 16[$ et donc $x^2 + 4 \in [8; 20[$. On en déduit que $0 \leq \dfrac{|x|+3}{x^2+4} < \dfrac{7}{20}$.

3 Raisonnements

Exercice n° 11

a) Soit x et y des réels. Montrer que $2xy \leq x^2 + y^2$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

b) En déduire que, si x et y sont strictement positifs alors $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

Exercice n° 12

Soit x et y des réels positifs.

a) Montrer que $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

b) En déduire que, si $x \geq y$ alors $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$.

Exercice n° 13

Prouver par récurrence les propriétés suivantes :

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ b) $\forall n \in \mathbb{N}, \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

c) Pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8

Exercice n° 14

Montrer que si un réel s'écrit sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec a et b des entiers relatifs, alors cette écriture est unique.