Chapitre 1 - Exercices

1 Logique, notations mathématiques

Exercice n° 1

1. Montrer que $\neg(p \vee q)$ est équivalente à $(\neg p) \wedge (\neg q)$.
2. Etant données deux propositions p et q, que signifient les expressions « p est une condition nécessaire de q » et « p est une condition suffisante de q » ?
3. Enoncer le théorème de Pythagore, sa réciproque ainsi que sa contraposée.
4. Ecrire en langage mathématiques l'ensemble E des réels dont le logarithme népérien est strictement supérieur à 4 ainsi que l'ensemble F des entiers naturels qui sont des carrés d'entiers naturels.
5. Déterminer $]-7;5] \cap [\![0;9]\!]$.

Exercice n° 2

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \Longrightarrow x \leq 3$

b) $\exists x \in \mathbb{R}^+ / x < \sqrt{x}$

c) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2\ x < y \Longrightarrow |x| < |y|$

d) $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}/n^2 > N$

Exercice n° 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ecrire avec le formalisme mathématiques les propriétés suivantes de f.

a) L'image de 5 par f est 2.

b) 5 est l'unique antécédent de 2 par f.

c) $f(x) = 0$ admet des solutions.

d) f admet un maximum.

e) f est croissante sur $\mathbb{R}$.

f) $f(x) = 0$ admet une unique solution.

Exercice n° 4

1. Parmi les fonctions de référence : cos, sin, ln, exp, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^2$ quelles sont-celles qui vérifient les propriétés suivantes ($\mathcal{D}$ est le domaine de définition de la fonction f).

   a) $f(0) \in \{0;1\}$

   b) $\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \geq 0$

   c) $\exists A \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathcal{D}, f(x) < A$

   d) $\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2,\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$

2. Exprimer les négations des propriétés ci-dessus.

2 Démontrer

Exercice n° 5

a) Soit x et y des réels. Montrer que $2xy \leq x^2 + y^2$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

b) En déduire que, si a et b sont positifs alors $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. *(Inégalité arithmético-géométrique)*

Exercice n° 6

Soit x et y des réels positifs.

a) Montrer que $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

b) En déduire que, si $a \geq b \geq 0$ alors $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a-b}$.

Exercice n° 7

Prouver par récurrence les propriétés suivantes :

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ b) $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

c) Pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8

Exercice n° 8

Montrer que si un réel s'écrit sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec a et b des entiers relatifs, alors cette écriture est unique.