

Chapitre 3 - Calculs dans \mathbb{C} - Exercices

Exercice n° 1

VRAI ou FAUX sur l'ensemble du chapitre.

- L'inverse d'un complexe non réel est un complexe non réel.
- Soit z un complexe non réel. Les points $A(z)$, $B(\bar{z})$ et $C(-z)$ ne sont pas alignés.
- Soit z un complexe non nul. Les vecteurs d'affixes complexes z et iz sont colinéaires.
- Puisqu'un module s'interprète comme une distance, une équation faisant intervenir des modules aura comme solution un cercle ou l'ensemble vide.
- Tous les complexes qui ne sont pas des réels strictement négatifs admettent deux racines carrées.
- Les réels strictement négatifs admettent deux racines carrées.
- Soit $P(z) = az^2 + bz + c$ un polynôme du second degré à coefficients complexes. On note Δ son discriminant. Si $\Delta \neq 0$ alors P admet deux racines complexes qui sont $\frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $\frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- Un polynôme du second degré à coefficients complexes peut toujours se factoriser en un produit de facteurs du premier degré.
- On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est croissante lorsque les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont croissantes.

1 Généralités.

Exercice n° 2

Donner les formes algébriques des complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1}{i} \quad ; \quad z_2 = \frac{5-i}{3i+1} \quad ; \quad z_3 = 1 + \frac{7-i}{2+\sqrt{3}i} \quad ; \quad z_4 = \frac{1}{(1-i)^3}$$

Exercice n° 3

Soit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto 2iz - 2i \end{cases}$

- Quels sont les points d'affixe z tels que $f(z)$ est réel ? imaginaire pur ?
- Soient les points A, B, C , d'affixes respectives $a = 2i$, $b = 2 + i$ et $c = 6 - i$. Montrer que A, B, C sont alignés et que les points $A'(f(a))$, $B'(f(b))$ et $C'(f(c))$ le sont également.

Exercice n° 4

Soit le complexe $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

- Calculer $1 + j + j^2$.
- En déduire $\sum_{k=0}^{2019} j^k$?

Exercice n° 5

Résoudre les équations $(E_1) : z^2 - 3\bar{z} = 1$ et $(E_2) : |1 - z + 3i| = |iz + 4|$.

2 Autour des polynômes

Exercice n° 6

Résoudre les équations suivantes :

$$(E_1) : 3z^2 - z = 2 \quad ; \quad (E_2) : 3z^2 + 2 = z \quad ; \quad (E_3) : z^2 + 2iz = -3 \quad ; \quad (E_4) : (1+i)z^2 + 2z + 3 = i$$

Exercice n° 7

Est-il possible de trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ de sorte que $P(z) = (1 + \alpha)z^2 + iz - 2$ n'ait qu'une racine ?

Exercice n° 8

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On appelle **racines n -ième de 1** les racines de $z^n - 1$.

1. Quelques propriétés

- Montrer qu'il existe toujours au moins une racine n -ième de 1.
- Montrer que toute racine n -ième de l'unité a un module qui vaut 1. En déduire sur quel objet du plan complexe sont placées les images des racine n -ième de 1.
- Montrer que, si n est pair et que α est une racine n -ième de 1 alors $-\alpha$ en est une autre.

2. Petites valeurs de n

- Déterminer les racines n -ième de 1 pour $n = 2$ et $n = 3$.
- Déterminer les racines n -ième de 1 pour $n = 4$.

3 Plus difficile

Exercice n° 9

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tel que $\frac{z-i}{z-1}$ est réel.

Exercice n° 10

Soit z un complexe de module 1. Calculer $|1+z|^2 + |1-z|^2$.

Exercice n° 11

On travaille dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On appelle A et B les points d'affixes respectives -1 et 1 .

Soit un complexe $z \neq 0; 1; -1$, on appelle M , N et P les points d'affixes respectives z , z^2 et z^3 .

- Prouver que M , N et P sont distincts deux-à-deux.
- On se propose, dans cette question, de déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P

- Prouver que MNP est rectangle en P si et seulement si : $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$.
- Montrer que :

$$|z+1|^2 + |z|^2 = 1 \iff \left(z + \frac{1}{2}\right) \overline{\left(z + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4}$$

On pourra montrer que les deux équations sont équivalentes à une troisième équation.

- En déduire que MNP est rectangle si et seulement si $M(z)$ appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.