Chapitre 3 - Calculs dans $\mathbb{C}$ - Exercices

Exercice n° 1

VRAI ou FAUX sur l'ensemble du chapitre.

a) L'inverse d'un complexe non réel est un complexe non réel.

b) Soit z un complexe non réel. Les points $A(z)$, $B(\overline{z})$ et $C(-z)$ ne sont pas alignés.

c) Soit z un complexe non nul. Les vecteurs d'affixes complexes z et iz sont colinéaires.

d) Puisqu'un module s'interpête comme une distance, une équation faisant intervenir des modules aura comme solution un cercle ou l'ensemble vide.

e) Tous les complexes qui ne sont pas des réels strictement négatifs admettent deux racines carrées.

f) Les réels strictement négatifs admettent deux racines carrées.

g) Soit $P(z) = az^2 + bz + c$ un polynôme du second degré à coefficients complexes. On note Δ son discriminant. Si $\Delta \neq 0$ alors P admet deux racines complexes qui sont $\dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $\dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

h) Un polynôme du second degré à coefficients complexes peut toujours se factoriser en un produit de facteurs du premier degré.

i) On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est croissante lorsque les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont croissantes.

1 Généralités.

Exercice n° 2

Donner les formes algébriques des complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1}{i} \quad ; \quad z_2 = \frac{5-i}{3i+1} \quad ; \quad z_3 = 1 + \frac{7-i}{2+\sqrt{3}i} \quad ; \quad z_4 = \frac{1}{(1-i)^3}$$

Exercice n° 3

Soit l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & 2iz - 2i \end{array} \right.$

a) Quels sont les points d'affixe z tels que $f(z)$ est réel ? imaginaire pur ?

b) Soient les points A, B, C, d'affixes respectives $a = 2i$, $b = 2 + i$ et $c = 6 - i$. Montrer que A, B, C sont alignés et que les points $A'(f(a)), B'(f(b))$ et $C'(f(c))$ le sont également.

Exercice n° 4

Soit le complexe $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculer $1 + j + j^2$.

b) En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{2019} j^k$?

Exercice n° 5

Résoudre les équations $(E_1)\ :\ z^2 - 3\overline{z} = 1$ et $(E_2)\ :\ |1 - z + 3i| = |iz + 4|$.

2 Autour des polynômes

Exercice n° 6

Résoudre les équations suivantes :

$(E_1)\ :\ 3z^2-z=2 \quad ; \quad (E_2)\ :\ 3z^2+2=z \quad ; \quad (E_3)\ :\ z^2+2\mathrm{i}z=-3 \quad ; \quad (E_4)\ :\ (1+\mathrm{i})z^2+2z+3=i$

Exercice n° 7

Est-il possible de trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ de sorte que $P(z) = (1+\alpha)z^2 + iz - 2$ n'ait qu'une racine ?

Exercice n° 8

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On appelle **racines n-ième de** 1 les racines de $z^n - 1$.

1. Quelques propriétés
   a) Montrer qu'il existe toujours au moins une racine n-ième de 1.
   b) Montrer que toute racine n-ième de l'unité a un module qui vaut 1. En déduire sur quel objet du plan complexe sont placées les images des racine n-ième de 1.
   c) Montrer que, si n est pair et que α est une racine n-ième de 1 alors $-\alpha$ en est une autre.
2. Petites valeurs de n
   a) Déterminer les racines n-ième de 1 pour $n=2$ et $n=3$.
   b) Déterminer les racines n-ième de 1 pour $n=4$.

3 Plus difficile

Exercice n° 9

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tel que $\dfrac{z-i}{z-1}$ est réel.

Exercice n° 10

Soit z un complexe de module 1. Calculer $|1+z^2| + |1-z|^2$.

Exercice n° 11

On travaille dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$. On appelle A et B les points d'affixes respectives -1 et 1.
Soit un complexe $z \neq 0;1;-1$, on appelle M, N et P les points d'affixes respectives z, z^2 et z^3.

1. Prouver que M, N et P sont distincts deux-à-deux.
2. On se propose, dans cette question, de déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P
   a) Prouver que MNP est rectangle en P si et seulement si : $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$.
   b) Montrer que :
   $$|z+1|^2+|z|^2=1 \Longleftrightarrow \left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4}$$
   On pourra montrer que les deux équations sont équivalentes à une troisième équation.
   c) En déduire que MNP est rectangle si et seulement si $M(z)$ appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.