

Fiche 3 : Résoudre des équations, des inéquations

Définition

Résoudre une équation (ou une inéquation) c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui rendent l'équation vraie.

Exemple : soit $x \in \mathbb{R}$; résoudre $\pi x - 7 = \frac{x + \sqrt{2}}{5}$.

Proposition

- i. Lorsqu'on ajoute ou soustrait un réel à une équation, on obtient une équation équivalente.
- ii. Lorsqu'on multiplie ou divise une équation par un réel non nul, on obtient une équation équivalente.
- iii. Lorsqu'on ajoute ou soustrait un réel à une inéquation, on obtient une inéquation équivalente. **Le sens du symbole ne change pas.**
- iv. Lorsqu'on multiplie ou divise une inéquation par un réel non nul, on obtient une inéquation équivalente. **Le sens du symbole ne change pas si le réel est positif; on change le sens du symbole si le réel est négatif.**

Exercice

Résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$, $1 - x \ln\left(\frac{7}{8}\right) \leq \pi$.

Réponse

On a : $1 - x \ln\left(\frac{7}{8}\right) \leq \pi \iff$

Méthode (Résoudre une équation ou une inéquation polynomiale)

- i. Degré 1 : on travaille par équivalences en faisant des opérations.
- ii. Degré ≥ 2 : par opérations on annule un des membres, puis on factorise l'autre. Ensuite,
 - Pour une équation : $AB = 0$ est équivalent à $(A = 0$ ou $B = 0)$, on résout ces deux équations dont les degrés sont plus bas que la première.
 - Pour une inéquation : puisque l'un des membres est nul, on se ramène à une étude de signe qu'on fait à l'aide d'un tableau.
- iii. Degré 2 : si on ne parvient pas à factoriser, on peut utiliser le discriminant et les formules vues en 1ère.

Exercice

Résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - x^2 + 1 \leq x$.

Réponse

C'est une inéquation polynômiale de degré

Méthode (Résoudre une équation ou une inéquation avec une valeur absolue)

On interprète la valeur absolue comme une distance et on résout à l'aide d'une figure.

Exercice

Résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$, $|x + \pi| = \sqrt{2}$.

Réponse

Pour $x \in \mathbb{R}$, $|x + \pi| = | \quad |$ est la distance entre

Exercice n° 1

1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

— **Niveau 1** $(E_1) : \frac{7t+1}{3} = \frac{2t-5}{\sqrt{3}}$; $(E_2) : (x-3)(7-5x) = 0$; $(E_3) : |5-x| = -1$.

— **Niveau 2** $(E_4) : (2x-3)^2 = 4$; $(E_5) : x^2 - x = (3x^2+1)(x-1)$; $(E_6) : |\pi - 2x| = 5$.

— **Niveau 3** $(E_7) : t^4 + t^2 + 1 = 0$; $(E_8) : x^3 = x^2 + x - 1$; $(E_9) : |x| = |x^2 + x - 3|$.

2. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

— **Niveau 1** $(I_1) : x + 2 < 7x - 3$; $(I_2) : (Y+3)(Y-1) \geq 0$; $(I_3) : |3-x| < \sqrt{2}$.

— **Niveau 2** $(I_4) : (2x+1)(x^2-3x-2) \geq 0$; $(I_5) : \frac{2x^2+x-1}{3x^2-x-7} \geq 0$; $(I_6) : |\pi - 2x| > 5$.

Exercice n° 2

1. Trouver une équation dont la solution est $\{1; 2\}$. En trouver une autre.

2. Trouver une inéquation dont la solution est $[3; 5]$. En trouver une autre dont la solution est $[3; 5[$.

3. Soit a et b des éléments de $[2; 3]$. Donner les meilleurs encadrements possibles pour les nombres $7a + 1$; $a^2 - 3b$ et $\frac{a+1}{b-1}$.

Pour s'entraîner en autonomie sur les équations du second degré : fiche 6 du Cahier de Calcul.