Chapitre 4 - Vers les équations différentielles - Exercices

1 Primitives

Exercice n° 1

Calculer toutes les primitives des fonctions suivantes (en précisant les intervalles) :

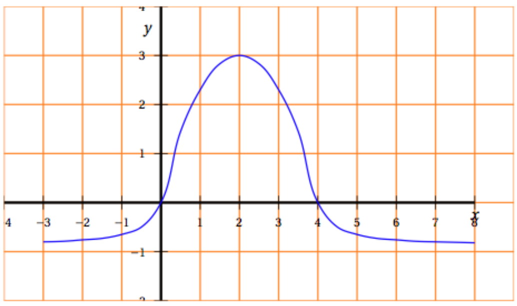
$f(t) = t^9 - 4t^7$	$g(t) = 8t^{-5}$	$h(x) = \frac{7}{\sqrt{x}} - \pi$	$i(x) = \frac{1}{3x+2}$
$j(t) = \cos(5t)$	$k(x) = e^{7-x}$	$l(x) = \sin(3x+2)$	$m(t) = \frac{3t+1}{t}$
$n(x) = (3x+1)^8$	$o(x) = xe^{(x^2)}$	$p(t) = \frac{4t+2}{t^2+t+3}$	$q(x) = \cos x(\sin x)^9$

Exercice n° 2

Résoudre $y' = \frac{1+3t}{1-t^2}$. *(On pourra trouver des réels λ et μ tels que $\frac{\lambda}{1-t} + \frac{\mu}{1+t} = \frac{1+3t}{1-t^2}$)*

Exercice n° 3

On considère la fonction $f \in \mathcal{C}^0([-3;8], \mathbb{R})$ dont la courbe est représentée ci-dessous :



On définit la fonction F sur I, par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. Que vaut $F(0)$?
2. Donner le signe de $F(x)$:
   — pour $x \in [0\ ;\ 4]$;
   — pour $x \in [-3\ ;\ 0]$.
   Justifier les réponses.
3. Faire figurer sur le graphique les éléments permettant de justifier les inégalités $6 \leqslant F(4) \leqslant 12$.
4. Déterminer le sens de variation de F sur I puis dessiner à main levée l'allure de la courbe de F.

(D'après Bac S)

Exercice n° 4

Déterminer des primitives pour les fonctions $x \mapsto x^2 \ln x$, $x \mapsto x\mathrm{Arctan}\, x$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x \cos x$.
(On n'oubliera pas de préciser les intervalles sur lesquels on travaille).

2 Calcul d'intégrales

Exercice n° 5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x$.

a) Prouver que (I_n) est une suite décroissante.

b) Prouver que (I_n) converge vers un certain réel l.

c) A l'aide d'une IPP, trouver une relation entre I_{n+1} et I_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
d) En déduire la valeur de l.

Exercice n° 6

a) Justifier que, pour tout réel x, la fonction $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{3+e^{-u}} \mathrm{d}u$ est bien définie.
b) En posant $t = e^u$, calculer $F(x)$.
c) Vérifier le calcul précédent.

Exercice n° 7

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^2 \frac{x}{x^4+1}\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_3^4 \frac{t+1}{t-2}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^1 \frac{2}{(3t+6)^2}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$$

3 Résolution d'équations différentielles

Exercice n° 8

Résoudre les équations différentielles avec conditions initiales suivantes suivantes :

$$(S_1) : \begin{cases} -y' + 2y + t - 1 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} ty' + y = 8t + 1 \\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad (S_3) : \begin{cases} y' + t^2 y = t^3 + 1 \\ y(1) = -5 \end{cases}$$

Exercice n° 9

Résoudre l'équation différentielle $3y' - 4y = \cos(5t)$.

Exercice n° 10

Résoudre les équations différentielles $(1+x^2)y' + 2xy = e^x + x$ et $\ln x y' + \frac{y}{x} = 1$.

Exercice n° 11

On dispose d'un stock de noyaux de Radium 225 (^{225}Ra).
La demi-vie de cet isotope radio-actif est de 1602 ans.
a) Dans cent ans, quelle proportion du stock sera toujours présente ?
b) Combien de temps faut-il attendre pour avoir 90% du stock en moins ?

Exercice n° 12

On étudie la décomposition de l'eau oxygénée H_2O_2 suivant la réaction :

$$H_2O_2 \to H_2O + \frac{1}{2}O_2$$

On détermine régulièrement a concentration en H_2O_2, on obtient les résultats suivants :

temps en s	0	180	360	540	720	900
$[H_2O_2]$ en mol/L	12.3	8.4	6.1	4.1	2.9	2

a) On suppose que la cinétique est d'ordre 1. Quelle est alors l'équation différentielle vérifiée par $[H_2O_2]$?
b) En déduire qu'il existe un réel positif λ tel que $[H_2O_2] = 12.3e^{-\lambda t}$.
c) Que peut-on dire de la fonction $\ln[H_2O_2]$?
d) Dans un repère orthonormé, placer les points $(t; \ln[H_2O_2])$ déduits du tableau fourni.
En déduire une valeur approchée de λ.
e) Calculer le temps de demi-réaction.

4 Plus difficile

Exercice n° 13

a) Prouver que $1+\cos t = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$, pour tout réel t.

b) Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

Exercice n° 14

Pour tout x dans $[0; \frac{\pi}{2}]$, calculer les intégrales $I = \displaystyle\int_0^x \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t$.

Exercice n° 15

1. Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle $y'\cos x - y\sin x = \cos x$.
2. Existe-t-il des solutions ayant des limites finies en $-\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{\pi}{2}$?

Exercice n° 16

On considère l'équation différentielle $(E) : f' = f(1-f)$.
En considérant $y = \frac{1}{f}$, résoudre (E).