Fiche 4 : Méthode du pivot de Gauss pour résoudre des systèmes linéaires

1 Exemple introductif

On travaille dans le plan muni d'un repère. On considère les droites d et Δ d'équations cartésiennes respectives $x + 3y - 5 = 0$ et $2x - y + 1 = 0$. Trouver les éventuels points d'intersections de d et Δ.

Déjà, $d \neq \Delta$ car

On en déduit qu'il y a au plus un point commun aux deux droites. Déterminons cet éventuel point :

2 Opérations élémentaires et applications à la résolution du système

Définition
Sur un système linéaire on dispose de trois **opérations élémentaires** :
- **permutation** des lignes i et j, notée $L_i \leftrightarrow L_j$;
- **dilatation** de la ligne i d'un rapport $\lambda \neq 0$, notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$;
- **transvection** : $L_i \leftarrow \lambda L_i - \lambda L_j$.

Proposition
En faisant une opération élémentaire sur un système, on obtient un système équivalent.

Méthode (Algorithme du pivot de Gauss)
1. On écrit les équations du système de façon ordonnée, c'est-à-dire avec les inconnues dans le même ordre et alignées verticalement.
2. En faisant des transvections à l'aide de la première équation, on élimine la première inconnue des équations suivantes.
3. En faisant des transvections à l'aide de la deuxième équation, on élimine la deuxième inconnue des équations suivantes.
4. On poursuit ainsi jusqu'à la dernière équation. Il y a alors trois possibilités :
   — Une des équations ne comporte plus d'inconnue et elle est fausse (du type « 2=3 ») alors le système n'a pas de solution.
   — La dernière équation a une unique inconnue : on la résout puis on remonte depuis la dernière équation jusqu'à la première pour trouver les valeurs des inconnues.
   — Il reste plus d'une inconnue dans la dernière équation : le système a alors une infinité de solutions. Dans la dernière équation on choisit une variable qu'on exprime en fonction des autres, que l'on appelle *paramètres*. On remonte ensuite depuis la dernière équation jusqu'à la première et on exprime les inconnues en fonction des paramètres.

Remarque : on a donné une version simplifiée de l'algorithme. Si par exemple, la première équation ne fait pas apparaître la première inconnue il suffit

Exemples : Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3y+4x & = & -6 \\ 11x-2y & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 7 \\ 3x & - & 2y & = & 5 \\ -x & + & 3y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 8 \\ 2x+y-3z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice n° 1

Résoudre les systèmes suivants :

$$(\mathcal{S}_1) : \left\{\begin{array}{c} 2x+y+z=3 \\ x-y+3z=8 \\ x+2y-z=-3 \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S}_2) : \left\{\begin{array}{c} 3y-z=0 \\ x+2y+3z=-1 \\ 2x+2y+2z=-3 \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S}_3) : \left\{\begin{array}{c} x+y+z=15 \\ x-y+2z=5 \end{array}\right.$$

Exercice n° 2

On travaille dans l'espace muni d'un repère orthonormé. Soit $A(3;-2;0)$.

a) En utilisant le produit scalaire, déterminer une équation cartésienne du plan orthogonal à $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{r} 3x+5y-3z+1=0 \\ 7x-3z+5=0 \end{array}\right.$ puis interpréter géométriquement le résultat trouvé.

Pour travailler en autonomie : fiche 15 du Cahier de Calcul.