Chapitre 5 - Calculs algébriques - Exercices

1 Manipuler les symboles

Exercice n° 1

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des suites de complexes. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Dire si les propriétés suivantes sont vraies en général :

$$(P_1) \ : \ \sum_{k=0}^{n} a_k + b_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k \quad ; \quad (P_2) \ : \ \sum_{k=0}^{n} a_k \times b_k = \sum_{k=0}^{n} a_k \times \sum_{k=0}^{n} b_k$$

$$(P_3) \ : \ \prod_{k=0}^{n} a_k + b_k = \prod_{k=0}^{n} a_k + \prod_{k=0}^{n} b_k \quad ; \quad (P_4) \ : \ \prod_{k=0}^{n} a_k \times b_k = \prod_{k=0}^{n} a_k \times \prod_{k=0}^{n} b_k$$

$$(P_5) \ : \ \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k \quad ; \quad (P_6) \ : \ \prod_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lambda^n \prod_{k=0}^{n} a_k$$

$$(P_7) \ : \ \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \quad ; \quad (P_8) \ : \ \left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)^2 = \prod_{k=0}^{n} a_k^2$$

Exercice n° 2

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \ln(\cos(3x + \frac{\pi}{7}))$.

Exercice n° 3

Soit $x \in \mathbb{C}$. Compléter les sommes pour que les changements d'indices soient corrects.

$$\sum_{k=8}^{50} x^{3+k} = \sum_{k=\dots}^{\dots} x^k = \sum_{k=0}^{\dots} x^{\dots}$$

2 Calculer des sommes

Exercice n° 4

Soit n un entier naturel non nul. On considère la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 - k^2$.

En calculant S_n de deux façons, retrouver la formule du cours pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

Exercice n° 5

Soit les suites u et v, définies pour tout entier $n \geq 1$, par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Etudier les variations de u et v.

Exercice n° 6

Soit n un entier naturel non nul (et supérieur ou égal à 2 pour la 2è somme). Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} i(i-1) \quad ; \quad \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad ; \quad \sum_{1 \leq i,j \leq n} i + j \quad ; \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{j}$$

Exercice n° 7

Soit x un réel différent de 1 et n un entier naturel non nul. On pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. Rappeler l'expression de $f_n(x)$ en fonction de n et de x (sans $\sum$).
2. En déduire une expression de $\sum_{k=0}^{n} kx^k$ en fonction de n et de x.
3. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$.

Exercice n° 8

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a : $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} \leq 2$.
3. Que dire de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

Exercice n° 9

Pour tout entier naturel non nul n, et pour $p \in [\![0;3]\!]$ on note $S_p(n)$ la somme $\sum_{k=1}^{n} k^p$.

1. Rappeler les expressions, en fonction de l'entier n, de $S_0(n)$, $S_1(n)$ et $S_2(n)$.
2. Exprimer de deux façons différentes $\sum_{1 \leq i,j \leq n} ij$ en fonction de $S_3(n)$.
3. En déduire une expression de $S_3(n)$ en fonction de n.

Exercice n° 10

Soit n un entier naturel non nul.

1. Donner une expression, en fonction de n, de la somme $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \max\{i, j\}$.
2. En déduire une expression, en fonction de n, de la somme $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \min\{i, j\}$.

Exercice n° 11

Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Exercice n° 12

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule du binôme montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad ; \qquad \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

(Dans les deux cas, on pourra utiliser de façon astucieuse la fonction $x \mapsto (1+x)^n$).