

Fiche 5 : Calculer des sommes

1 Sommes simples

La notation des sommes avec $\dots$ est abusive. Par exemple, si on note : $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$ il y a une ambiguïté : n peut-il être inférieur ou égal à 4 ? De plus, les points de suspension suggèrent qu'il se passe « ce que tout le monde imagine » ce qui n'est pas clair !

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes. Soit $n \leq m$ deux entiers naturels.

La somme de tous les termes de la suite dont les indices sont dans $\llbracket n; m \rrbracket$ est notée $\sum_{k=n}^m u_k$.

Exemples :

$$\sum_{k=0}^{100} k = \quad \sum_{k=0}^{100} 2^k = \quad \sum_{k=0}^{100} \pi =$$

Remarque : le choix de la lettre k est arbitraire. On peut en changer (mais pas pour u ou n qui sont déjà utilisées).

Proposition

On peut factoriser, couper une somme en deux, séparer une somme. Soit $1 \leq m < n$:

$$\sum_{i=1}^n \lambda u_i = \quad ; \quad \sum_{i=1}^n (u_i + v_i) = \quad ; \quad \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^m u_i + \sum_{i=m+1}^n u_i$$

Une somme peut être écrite de plusieurs façons différentes, on peut donc faire des changements dans les indices. Par exemple :

$$\begin{aligned} \bullet \quad 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 100^3 &= \sum_{k=2}^{100} k^3 = \sum_{k=1}^{99} (k+1)^3 \\ \bullet \quad \sum_{k=7}^{100} u_k &= u_7 + u_8 + \dots + u_{100} = u_7 + u_8 + \dots + u_{100} = \sum_{i=1}^{93} u_{i+7} \end{aligned}$$

Définition (Généralisation de la notation $\sum$)

- Si $I \subset \mathbb{N}$, $\sum_{i \in I} u_i$ désigne la somme des termes de la suite u dont les indices sont dans I .
- Si J est une partie finie de $\mathbb{C}$, $\sum_{x \in J} x$ désigne la somme de tous les éléments de J .
- On convient qu'une somme indexée sur $\emptyset$ est

Remarque : il est important que les sommes soient finies. Quel sens donner à une somme infinie ?

Théorème (sommes à connaître)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=1}^n k = \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \quad \text{et, pour } q \neq 1 : \sum_{k=0}^n q^k =$$

Exercice : démontrer les formules du théorème précédent. (Une possibilité :).

2 Sommes doubles

Exemple :

soit n, p des entiers naturels non nuls, A une matrice de taille $n \times p$ c'est-à-dire est un tableau de nombres à n lignes et p colonnes.

- somme des coefficients de la première ligne : de la k -ème ligne :
- somme des coefficients de la j -ème colonne :
- somme des coefficients diagonaux (si la matrice est carrée) :
- somme de tous les coefficients :

Théorème (Permutation des sommes sur les sommes doubles)

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} = \sum_{k=0}^n \sum_{i+j=k} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n$$

Remarque : dans le théorème précédent, pour alléger les notations, on a omis les $u_{i,j}$.

Exercice n° 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les fonctions $f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$ et $g_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

1. Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de f'_n .
2. Exprimer f_n et f'_n sans $\sum$.
3. Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, g_n est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de g'_n .

Exercice n° 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant $\sum_{k=0}^n (k+1)^2 - k^2$ de deux façons, retrouver la formule du cours pour $\sum_{k=0}^n k$.

Exercice n° 3

Soit a, b deux réels, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$.

Exercice n° 4

Soit n un entier naturel non nul (≥ 2 pour la 2ème somme). Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{i=1}^n i(i-1) \quad ; \quad \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \quad ; \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} i + j \quad ; \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{j}$$

Pour travailler en autonomie : Fiche 18 du Cahier de Calcul.