Fiche 5 : Calculer des sommes

1 Sommes simples

La notation des sommes avec ... est abusive. Par exemple, si on note : $1+2+3+4+\cdots+n$ il y a une ambiguité : n peut-il être inférieur ou égal à 4 ? De plus, les points de suspension suggèrent qu'il se passe « ce que tout le monde imagine » ce qui n'est pas clair !

Définition
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. Soit $n \leq m$ deux entiers naturels.

La somme de tous les termes de la suite dont les indices sont dans $[\![n;m]\!]$ est notée $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} u_k$.

Exemples :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{100} k =$ $\qquad$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} 2^k =$ $\qquad$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} \pi =$

Remarque : le choix de la lettre k est arbitraire. On peut en changer (mais pas pour u ou n qui sont déjà utilisées).

Proposition
On peut factoriser, couper une somme en deux, séparer une somme. Soit $1 \leq m < n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda u_i = \qquad ; \sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i) = \qquad ; \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{i=m+1}^{n} u_i$$

Une somme peut être écrite de plusieurs façons différentes, on peut donc faire des changements dans les indices. Par exemple :

- $2^3+3^3+4^3+\cdots+100^3 = \displaystyle\sum_{i=2}^{100} k^3 = \sum_{i=1}^{99}(k+1)^3$
- $\displaystyle\sum_{k=7}^{100} u_k = u \quad + u \quad + \cdots + u \quad = u \qquad + u \qquad + \cdots + u \qquad = \sum_{i=1} u$

Définition (Généralisation de la notation $\sum$)

— Si $I \subset \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ désigne la somme des termes de la suite u dont les indices sont dans I.

— Si J est une partie finie de $\mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{x\in J} x$ désigne la somme de tous les éléments de J.

— On convient qu'une somme indicée sur $\emptyset$ est

Remarque : il est important que les sommes soient finies. Quel sens donner à une somme infinie ?

Théorème (sommes à connaître)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \qquad \text{et, pour } q \neq 1 : \sum_{k=0}^{n} q^k =$$

Exercice : démontrer les formules du théorème précédent. (Une possibilité :).

2 Sommes doubles

Exemple :
soit n, p des entiers naturels non nuls, A une matrice de taille $n \times p$ c'est-à-dire est un tableau de nombres à n lignes et p colonnes.

- somme des coefficients de la première ligne : de la k-è ligne :
- somme des coefficients de la j-è colonne :
- somme des coefficients diagonaux (si la matrice est carrée) :
- somme de tous les coefficients :

Théorème (Permutation des sommes sur les sommes doubles)

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} \quad \text{et} \quad \sum_{1\leq i\leq j\leq n} = \sum \quad \sum \quad = \sum \quad \sum$$

Remarque : dans le théorème précédent, pour alléger les notations, on a omis les $u_{i,j}$.

Exercice n° 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 - k^2$ de deux façons, retrouver la formule du cours pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

Exercice n° 2

Soit a, b deux réels, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\boxed{a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k}$. .

Exercice n° 3

Soit n un entier naturel non nul (et supérieur ou égal à 2 pour la 2è somme). Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} i(i-1) \quad ; \quad \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad ; \quad \sum_{1\leq i,j\leq n} i+j \quad ; \quad \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{1}{j}$$

Pour travailler en autonomie : Fiche 18 du Cahier de Calcul.