Fiche 6 : Vecteurs du plan et de l'espace

1 Produit scalaire de deux vecteurs

Définition et calcul

Définition
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Proposition
Lorsqu'on travaille dans un repère **orthonormé** du plan ou de l'espace, on peut calculer simplement le produit scalaire à l'aide des coordonnées des vecteurs.

— Dans le plan :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$$

— Dans l'espace :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

Applications du produit scalaire

a) Tester l'orthogonalité (la perpendicularité) :

Proposition
Deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

b) Calculer des distances (en repère orthonormé) :

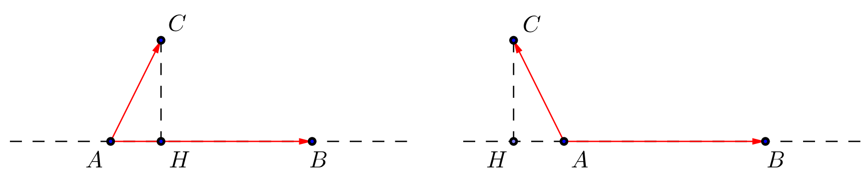
Proposition
Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. On a $AB =$

Démonstration
On a : ■

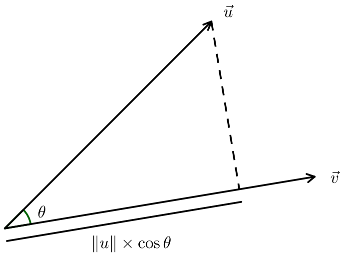
c) Projeter un vecteur sur un axe :

Proposition
Soient A, B, C trois points non alignés du plan et H le projeté orthogonal de C sur (AB). Alors :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \pm AB \times AH$$



En pratique, on a deux cas suivant si l'angle formé par les vecteurs est aigu ou obtu :



d) À déterminer un angle :
Si on travaille dans un repère orthonormé, on sait calculer le produit scalaire ainsi que les normes des vecteurs. Si aucun vecteur n'est nul on a :

$$\cos\theta =$$

On utilise ensuite la fonction arccosinus pour avoir une approximation de θ *(on y reviendra)*.

2 Dans l'espace, produit vectoriel de deux vecteurs

Définition et calcul

Remarque : soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs orthogonaux et de même norme dans l'espace. Il y a deux choix possibles pour un troisième vecteur $\vec{k}$ de même norme et qui soit orthogonal à $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Orienter l'espace, c'est choisir entre ces deux vecteurs et on dit que les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont dans le « sens direct » lorsqu'on peut les superposer, dans cet ordre, au pouce, à l'index et au majeur de la main droite.

Définition
On travaille dans l'espace orienté. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ qui vérifie :
  - — $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$
  - — le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est orienté dans le sens direct
  - — $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$
- Si au moins un des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est défini comme le vecteur nul $\vec{0}$.

Proposition
On travaille dans un **repère orthonormé direct** de l'espace. On a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x_u \\ \\ y_u \\ \\ z_u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_v \\ \\ y_v \\ \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Applications du produit vectoriel

a) À tester la colinéarité, le parallélisme :

Proposition
Deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

b) À créer des vecteurs normaux, des bases directes :

Proposition
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Alors :
— le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est normal au plan vectoriel défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
— la famille de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe de l'espace.

Vous manipulerez ces notions rapidement en SII.