

Chapitre 19 - Espaces Vectoriels de dimensions finies - Exercices

Vrai ou Faux ?

E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$, F et G en sont des sous-espaces vectoriels.

- i. Tout espace vectoriel admet des sous-espaces de dimensions finies.
- ii. Un espace de dimension 3 admet 4 sous-espaces vectoriels : $\{\vec{0}\}$, un espace de dimension 1, un espace de dimension 2 et l'espace entier.
- iii. Tout espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{\vec{0}\}$ admet une infinité de bases.
- iv. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et homogène est toujours un plan vectoriel.
- v. Dans un espace de dimension finie, on peut trouver des familles libres infinies.
- vi. Si $\dim F = 3$, $\dim G = 2$ alors $\dim E \geq 5$.
- vii. Si $\dim E = 5$ et que $\dim F = \dim G = 3$ alors $F \cap G$ n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$.
- viii. Si $\dim F + \dim G = \dim E$ alors $F \oplus G = E$.
- ix. Si $\dim F + \dim G = \dim(F + G)$ alors $F \cap G = \{\vec{0}\}$.
- x. \mathbb{C}^2 est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 4.

1 Pour démarrer

Exercice n° 1

On considère les vecteurs $\vec{x}(1, 1, 3)$ et $\vec{y}(2, -2, 1)$ de \mathbb{R}^3 .

- a) De quelle dimension est $E = \text{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$?
- b) Prouver que $E = \text{Vect}((1, -3, -2), (1, 5, 8))$.
- c) Donner trois bases distinctes de E .
- d) Quelle est la dimension d'un supplémentaires de E ?
- e) Donner deux supplémentaires distincts de E .

Exercice n° 2

Dans \mathbb{K}^3 , soit $\vec{u} = (1, 0, 2)$, $\vec{v} = (1, 1, 2)$, $\vec{w} = (1, 2, 2)$ et $\vec{t} = (2, 2, 2)$.

- a) Prouver que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$ est une famille génératrice de \mathbb{K}^3 .
- b) En extraire une base.

Exercice n° 3

Dans \mathbb{K}^4 , soit $\vec{u} = (2, 2, 2, 2)$, $\vec{v} = (-1, 1, 0, 2)$ et $\vec{w} = (1, 0, 1, 2)$.

- a) Prouver que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une famille libre.
- b) La compléter en une base.

Exercice n° 4

Dans \mathbb{R}^4 , on considère : $\vec{u} = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{v} = (1, -1, 1, 3)$, $\vec{w} = (2, -5, 0, 5)$, $\vec{x} = (-1, 0, -1, 2)$ et $\vec{y} = (2, 3, 0, 1)$.
Soit $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et $G = \text{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$.

Quelles sont les dimensions de $F, G, F + G$ et $F \cap G$?

Exercice n° 5

Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 / x - 2y + 3z = 0\} ; F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 / x = 2y = 3z\} ; G = \{P \in \mathbb{K}_4[X] / P(1) = 0\}.$$

2 Un peu plus difficile

Exercice n° 6

Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants :

- a) Polynômes : $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] / P(2) = P(3) = 0\}$; $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(\pi) = 0\}$.
- b) Matrices (pour $n > 0$) : $S_n = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / B = {}^t B\}$; $A_n = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / B = -{}^t B\}$.
- c) Fonctions : $E = \text{Vect}(\cos, \cos^2, \cos^3)$; $\mathcal{P} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$.
- d) Suites : $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$.

Exercice n° 7

Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que $((X - i)^i)_{i \in [0; n]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice n° 8

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. Quel est le rang de $(f, g, f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ g)$?

Exercice n° 9

On considère $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} / (a, b, c) \in \mathbb{K}^3 \right\}$.

- a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.
- b) Donner un supplémentaire de E .

3 Exercices théoriques

Exercice n° 10

Prouver le théorème de la base incomplète.

Exercice n° 11

Prouver la formule de Grassmann.

Exercice n° 12

Dans l'espace vectoriel E , on considère deux familles de vecteurs $\mathcal{F}_1 = \text{Vect}(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathcal{F}_2 = \text{Vect}(y_i)_{1 \leq i \leq p}$ qui vérifient :

$$\text{rg}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \text{rg}(\mathcal{F}_1) + \text{rg}(\mathcal{F}_2).$$

Prouver que les sous-espaces $\text{Vect}(\mathcal{F}_1)$ et $\text{Vect}(\mathcal{F}_2)$ sont en somme directe.

4 Plus difficile

Exercice n° 13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $a_0 < \dots < a_n$.

Prouver que la famille des polynômes de Lagrange associés à la famille $(a_i)_{i \in [0; n]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice n° 14

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 5, F et G deux sous-espaces de dimension 3.

Prouver qu'il existe un supplémentaire commun à F et G .