Chapitre 18 - Intégrale de Riemann - Exercices

Les calculs d'intégrales qui ont été vus précédemment, en particulier pour les fractions rationnelles, sont à revoir.

Vrai ou Faux ?

f et g désignent des fonctions définies sur un intervalle $[a;b]$.

i. Si f est en escalier, $2f$ est aussi en escalier.
ii. Si f est en escalier, $\cos f$ est aussi en escalier.
iii. Si f est en escalier, $\max(f,2)$ est aussi en escalier.
iv. f est intégrable si, et seulement si, f est en escalier.
v. f est intégrable si, et seulement si, f est continue.
vi. Si f est intégrable et que $\displaystyle\int_{[a;b]} f \geq 0$ alors $f \geq 0$.
vii. Si f est intégrable alors $\displaystyle\int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} |f|$.
viii. Si f et g sont intégrables alors $\displaystyle\int_{[a;b]} f \times g \geq \int_{[a;b]} f \times \int_{[a;b]} g$.

1 Calculer des primitives, des intégrales

Exercice n° 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-1}^{1} |x| \, \mathrm{d}x \quad ; \quad I_2 = \int_{-1}^{2} \max(2, \mathrm{e}^x) \, \mathrm{d}x \quad ; \quad I_3 = \int_0^{\pi} \cos\lfloor x \rfloor \, \mathrm{d}x \quad ; \quad I_4 = \int_0^5 |3x-2| \, \mathrm{d}x$$

Exercice n° 2

Déterminer une primitive pour les fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{3x} \sin x \quad ; \quad g : x \longmapsto \cos(x)\mathrm{ch}(x)$$

Exercice n° 3

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi} \cos^4 x \, \mathrm{d}x \quad ; \quad I_2 = \int_0^{\pi} \sin^2 x \sin 4x \, \mathrm{d}x \quad ; \quad I_3 = \int_0^1 \mathrm{Arctan}\, x \, \mathrm{d}x \quad ; \quad I_4 = \int_0^1 x\mathrm{Arctan}\, x \, \mathrm{d}x$$

Exercice n° 4

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+x+2} \, \mathrm{d}x \quad ; \quad I_2 = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-x+2} \, \mathrm{d}x \quad ; \quad I_3 = \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \quad ; \quad I_4 = \int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \, \mathrm{d}x$$

2 Exercices plus théoriques

Exercice n° 5

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{n+x} \, \mathrm{d}x$.

Exercice n° 6

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, continue telle que $\forall x \in [a;b],\ |f(x)| \leq 1$ et $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = b-a$.
Pour $x \in [a;b]$, que vaut $f(x)$?

Exercice n° 7

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, continue. Prouvez que la valeur moyenne de f est atteinte par f, autrement dit :

$$\exists c \in [a;b] \ / \ f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

3 Sommes de Riemann, formules de Taylor

Exercice n° 8

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}}$$

Exercice n° 9

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, prouver que :

$$\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}],\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \quad ; \quad \forall x \geq 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Exercice n° 10

Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

4 Plus difficile

Exercice n° 11

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{n\sin x}{n+x}\ \mathrm{d}x$.

Exercice n° 12

Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0;1],[0;1])$ qui vérifient $\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 (f(x))^2\ \mathrm{d}x$.