Chapitre 23 - Matrices et Applications Linéaires - Exercices

Vrai ou Faux ?

E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies (non nulles) n et p ; u est un élément de $\mathcal{L}(E,F)$. $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ désignent des bases de E et F.

i. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
ii. Si v est un endomophisme surjectif de E alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(v)$ est inversible.
iii. Si u est un isomorphisme alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}$ est carrée.
iv. Si v est un endomorphisme de E qui n'est pas injectif, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u à au moins une colonne nulle.
v. Une matrice de passage est inversible.
vi. Une matrice inversible est une matrice de passage.
vii. Toute matrice carrée inversible est équivalente à l'identité.
viii. Toute matrice carrée inversible est semblable à l'identité.
ix. Deux matrices carrées semblables sont équivalentes.
x. Si v est un automorphisme de E alors $v \circ v$ aussi.

1 Pour démarrer

Exercice n° 1

Soit h l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ défini par rapport à deux bases $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère : $\vec{e'}_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{e'}_2 = \vec{e}_3 + \vec{e}_1, \quad \vec{e'}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.
   Justifier que $\mathcal{E}' = (\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de h relativement aux bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}$.
3. Après avoir justifié que la famille $\mathcal{F}' = (\frac{1}{2}(\vec{f}_1 + \vec{f}_2), \frac{1}{2}(\vec{f}_1 - \vec{f}_2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, donner $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(h)$.
4. Reprendre les questions précédentes en faisant apparaître les matrices de passage

Exercice n° 2

On travaille dans le plan muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.
Soit f la projection sur l'axe des abscisses $\mathrm{Vect}(\vec{i})$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\vec{i} + \vec{j})$.

1. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.
2. Soit $\mathcal{B}' = (\vec{i} - \vec{j}, -2\vec{i} + 3\vec{j})$. Après avoir justifié que $\mathcal{B}'$ est une autre base du plan, déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$.
3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$.
4. Reprendre les questions précédentes en faisant apparaître les matrices de passage

Exercice n° 3

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.
Déterminer la matrice de f dans la base $(1 - X^2, X + X^2, 1 + X^2)$.

Exercice n° 4

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau, l'image et le rang de A.

2 Un peu plus difficile

Exercice n° 5

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On travaille dans $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}-$ espace vectoriel et muni de la base $\mathcal{E} = \{1, i\}$.
On considère l'application $f_\theta : z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$.

1. Montrer que f_θ est $\mathbb{R}$-linéaire.
2. Déterminer $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f_\theta)$.
3. Calculer A^2. En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}$ dans laquelle la matrice de f_θ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
4. Trouver une telle base $\mathcal{B}$.

Exercice n° 6

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $u_{\alpha,\beta}$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice : $M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
Existe-t-il des valeurs de α et de β telles que $u_{\alpha,\beta}$ soit injective ? surjective ?

3 Exercices théoriques

Exercice n° 7

1. Démontrer que deux matrices carrées semblables ont la même trace.
2. Est-ce également vrai pour deux matrices carrées équivalentes ?

Exercice n° 8

Soit u un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Démontrer que si u est un projecteur alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale avec uniquement des 0 et des 1 sur la diagonale.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Peut-on trouver un résultat similaire pour les symétries ? Les homothéties ?

Exercice n° 9

Soit E un espace à n dimensions et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que la condition $f \circ f = 0$ est équivalente à $\mathrm{Im} f \subset \ker f$. Quelle condition vérifie alors le rang de f ? On suppose dans le reste de l'exercice que $f \circ f = 0$.
2. Soit E_1 un supplémentaire de $\ker f$ dans E et soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r)$ une base de E_1. Montrer que la famille des vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r, f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_r))$ est libre. Montrer comment on peut la compléter, si nécessaire, par des vecteurs de $\ker f$ de façon à obtenir une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?
3. Sous quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $\mathrm{Im} f = \ker f$?
4. Exemple : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Montrer que $f \circ f = 0$. Déterminer une nouvelle base dans laquelle la matrice de f a la forme indiquée dans la question 2).

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
On définit par récurrence la suite d'endomorphimes $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u^0 = \mathrm{Id}_E \\ \forall n \geq 0,\ u^{n+1} = u \circ u^n \end{cases}$

Cette notation a du sens car, si la dimension de E est finie, la matrice de u^n est la puissance n-ième de la matrice de u (pour tout $n \in \mathbb{N}$, quelle que soit la base dans laquelle on travaille).

4 Plus difficile

Exercice n° 10

Déterminer un endomorphime f de $\mathbb{K}_2[X]$ tel que $f \neq 0$, $f \circ f \neq 0$ et $f \circ f \circ f = 0$.

Exercice n° 11

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer u^{-1}.
2. Déterminer des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ tels que :

$$u(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \quad ; \quad u(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \quad ; \quad u(\vec{e}_3) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

3. Justifier que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer P la matrice de passage de la base canonique à $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ainsi que P^{-1}.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $u^n = u \circ \cdots \circ u$ avec n occurences de u. Déterminer $\mathrm{Mat}_{can}(u^n)$.

Exercice n° 12

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Soit $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ puis déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \dfrac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{5}{2}x_n - \dfrac{2}{3}y_n \end{cases}$.