Chapitre 16 - Polynômes - Exercices

Vrai ou Faux ?

P et Q désignent des polynômes.

i. $\deg P \circ Q = \deg Q \circ P$.
ii. $4X^5 - 3X^2 + 3 \in \mathbb{R}_7[X]$.
iii. Le degré d'un polynôme est un entier naturel.
iv. Le degré d'un polynôme constant est 0.
v. Si P^2 est un polynôme unitaire alors P aussi.
vi. Si P et Q sont unitaires, alors $P \times Q$ et $P \circ Q$ aussi.
vii. Si $P \times Q$ est unitaire alors P et Q aussi.

1 Calculer

Exercice nº 1

Est-il possible de trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$ soit le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice nº 2

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P \circ P' = P$.

Exercice nº 3

a) Linéariser $\cos^2 x$ et $\cos^3 x$.
b) On pose $\alpha = 2\cos\frac{2\pi}{7}$. Prouver que α est racine de $P = X^3 + X^2 - 2X - 1$.

Exercice nº 4

Soit $n \geq 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $P(X) = (X\sin\theta + \cos\theta)^n$.

1. Déterminer le reste dans la division de $P(X)$ par $X^2 + 1$.
2. Déterminer le reste dans la division de $P(X)$ par $(X^2 + 1)^2$.

Exercice nº 5

Est-il possible de trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $X^4 + 8X^3 + 22X^2 + 24X + \alpha$ ait une racine triple ?

Exercice nº 6

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Prouver que P_n ne peut pas avoir de racines multiples.

Exercice nº 7

Soit $n \geq 2$. Donner la décomposition de $X^n - 1$ en produit de facteurs irréductibles.

Exercice nº 8

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2n > 0$. Prouver qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P + \lambda$ admette une racine double.

Exercice nº 9

Donner une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x^4+1}$.

Plus difficile

Exercice nº 10

Soit A, B, C des polynômes non constants de $\mathbb{K}[X]$. Prouver que si $A \circ C | B \circ C$ alors $A | B$.

Exercice nº 11

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P' | P$. *(On pourra utiliser la formule de Taylor).*