

Chapitre 20 - Probabilités sur un univers fini - Exercices

Vrai ou Faux ?

(Ω, \mathbb{P}) désigne un univers fini probabilisé, A , B et C des événements.

- i. Lorsqu'on joue à pile ou face, la probabilité d'obtenir pile est 0,5.
- ii. On choisit au hasard un élève dans une classe, on considère les événements A : « le prénom de l'élève est Kévin » et B : « le prénom de l'élève contient un V ». La probabilité de B est supérieure à celle de A .
- iii. Si $\mathbb{P}(A) = 0$ alors $A = \emptyset$.
- iv. $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \inf(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$.
- v. Supposons $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Si $\mathbb{P}_A(B) = 1$ alors $B \subset A$.
- vi. Si A et \bar{A} sont indépendants alors $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.
- vii. Deux événements incompatibles sont indépendants.
- viii. Deux événements indépendants sont incompatibles.
- ix. Si $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ alors A , B et C sont indépendants.

1 Généralités

Exercice n° 1

Pour les expériences aléatoires suivantes, précisez l'univers ainsi que son cardinal.

1. On lance un dé deux fois de suite.
2. On lance un dé 15 fois de suite.
3. On tire une main de deux cartes dans un jeu de 32 cartes.
4. On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir Pile et on note le nombre de lancers.

Exercice n° 2

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :

- A = "La carte est un pique"
- B = "La carte est rouge"
- C = "La carte est une figure"
- D = "La carte est le valet de trèfle"

1. Détailler l'univers ainsi que les événements A, B, C, D .
2. Calculer les probabilités de $A, B, C, D, A \cup B, A \cap B, B \cap C, B \cup C, D \cap C$ et $D \cup C$.

Exercice n° 3

On tire deux cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :

- A = "Les deux cartes sont des coeurs"
- B = "On a une paire d'as"
- C = "On a une paire"
- D = "Au moins une des cartes est un as"

Calculer les probabilités de A, B, C et D .

Exercice n° 4

On lance trois fois de suite une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité des événements suivants :

- a) "obtenir trois fois Pile"
- b) "obtenir exactement une fois Pile"
- c) "obtenir au moins une fois Pile"

Exercice n° 5

Soient A et B des événements avec $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$.

1. Donner des encadrements pour $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.

2. Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$ lorsque :
 - A et B sont incompatibles
 - $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$
 - A et B sont indépendants

2 Indépendance

Exercice n° 6

Un laboratoire propose un test de dépistage de la maladie de la vache folle. La notice précise la qualité du test : Lorsque le test est appliqué sur une vache malade, le test est positif dans 99.8 % des cas. Lorsque le test est appliqué sur une vache saine, le test est négatif dans 99.6 % des cas. On sait d'autre part qu'il y a une vache malade sur 100 000. Peut-on avoir confiance dans ce test ? Pour cela, on cherche la réponse à la question : si le test est positif, quelle est la probabilité que la vache soit malade ?

Exercice n° 7

On lance simultanément un dé rouge et un dé bleu et on note

- A : "la somme vaut 6"
- B : "le résultat du dé rouge est pair"

A et B sont-ils indépendants ?

Exercice n° 8

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner le premier point. Par la suite, lorsque Pierre gagne un point, la probabilité qu'il gagne le point suivant est 0,7. Par contre, s'il perd un point, la probabilité qu'il perde le point suivant est de 0,8.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements :

- G_n : « Pierre gagne le $n^{\text{ième}}$ point ».
- P_n : « Pierre perd le $n^{\text{ième}}$ point ».

On pose : $p_n = \mathbb{P}(G_n)$.

1. Déterminer p_1 puis p_2 .
2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2$.
3. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p_n - \frac{2}{5}$.
 - (a) Prouver que la suite (v_n) est une suite géométrique.
 - (b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n .
 - (c) Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n° 9

On a observé statistiquement que s'il fait beau un jour, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est de 0.7 et que s'il ne fait pas beau un jour la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est de 0.4.

- a) Il fait beau mercredi. Quelle est la probabilité qu'il fasse beau le vendredi ?
- b) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau vendredi s'il n'a pas fait beau mercredi ?

3 Plus difficile

Exercice n° 10

Problème de Monty-Hall ou énigme des trois portes

Dans un jeu télévisé, un candidat est face à trois portes. Derrière l'une des portes se trouve une voiture alors que derrière les deux autres se trouvent des chèvres. Le candidat ignore ce qui est derrière chaque porte alors que l'animateur le sait. Le jeu se déroule de la façon suivante :

1. Le candidat montre une porte mais ne l'ouvre pas.
2. L'animateur ouvre alors une des deux autres portes et dévoile une chèvre.
3. Le candidat doit alors ouvrir la porte de son choix parmi les deux restantes, il gagne ce qui est caché derrière.

Le candidat a-t-il intérêt à ouvrir la porte qu'il avait montré au départ, ou bien l'autre, ou alors aucun des deux choix n'est favorable ?