

## Chapitre 22 - Séries numériques - Exercices

### Vrai ou Faux ?

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont des suites de complexes.

- i. Changer un terme de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne change pas  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ .
- ii. Si  $u_n \rightarrow 0$  alors  $\sum u_n$  est convergente.
- iii. Une série non stationnaire d'entiers est divergente.
- iv. Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent alors  $\sum(u_n + v_n)$  diverge.
- v. Une série absolument divergente est absolument divergente.
- vi. Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  ont la même nature.
- vii. Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$  alors  $\sum u_n$  converge.
- viii. Une série à termes positifs convergente est absolument convergente.
- ix. Certaines séries de Riemann divergent.
- x. Supposons que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  soient réelles et que l'on ait  $\forall n \in \mathbb{N}, -|u_n| \leq v_n \leq |u_n|$ . Alors, la convergence de  $\sum u_n$  implique celle de  $\sum v_n$ .
- xi. Si  $\sum u_n$  est une série à termes positifs qui converge alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante.

### 1 Pour démarrer

#### Exercice n° 1

---

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum \cos n \quad ; \quad \sum \frac{1}{\ln n} \quad ; \quad \sum e^{-n} \quad ; \quad \sum \frac{10n+3}{5n^2+n+1} \quad ; \quad \sum \frac{\sin n}{n^2} \quad ; \quad \sum \ln\left(\sin \frac{1}{n}\right)$$

#### Exercice n° 2

---

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{n!}{n^n} \quad ; \quad \sum \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^3 \quad ; \quad \sum \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \quad ; \quad \sum \frac{1}{(\sqrt{n}+1)^n} \quad ; \quad \sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

#### Exercice n° 3

---

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) \quad ; \quad \sum \sqrt{e^{\frac{1}{n}} - 1} \quad ; \quad \sum \ln\left(\cos \frac{1}{n}\right) \quad ; \quad \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\binom{n^2}{2}}$$

### 2 Variations autour de la série harmonique

#### Exercice n° 4

---

1. Prouver que :  $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$ .
2. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  puis la divergence de  $\sum \frac{1}{n}$ .

### Exercice n° 5

---

1. Prouver que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$ .
2. En déduire (à nouveau) la divergence de  $\sum \frac{1}{n}$ .

### Exercice n° 6

---

1. Prouver que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\ln n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$ .
2. En déduire la divergence de  $\sum \frac{1}{n}$  ainsi qu'un équivalent simple de ses sommes partielles.
3. On pose, pour  $n \geq 1$ ,  $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ .
  - a) Etudier les variations de  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - b) Prouver que la suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un certain réel  $\gamma$ .
  - c) En déduire un développement asymptotique des sommes partielles de la série harmonique.

**Remarque :**  $\gamma$  s'appelle la **constante d'Euler-Mascheroni** ; ses premières décimales sont 0,577.

Cette constante demeure relativement mystérieuse, on ne sait par exemple pas si elle est rationnelle ou non. Le calcul de ses chiffres est également compliqué du fait d'une convergence très lente. Ainsi, pour  $n = 10^6$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$  est une approximation de  $\gamma$  fautive dès la 3<sup>è</sup> décimale ! (D'autres méthodes de calcul plus efficaces existent).

### Exercice n° 7

---

En utilisant la formule de Taylor Lagrange avec la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$ , prouver que la série harmonique alternée converge vers  $-\ln 2$ .

### Exercice n° 8

---

1. Soit  $k \geq 1$ . Calculer  $\int_0^1 x^{k-1} dx$ .
2. En déduire, à nouveau, que la série harmonique alternée converge vers  $-\ln 2$ .

## 3 Un peu plus difficile

### Exercice n° 9

---

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs qui est convergente. Etudier la nature des séries suivantes :

$$\sum u_n^2 \quad ; \quad \sum \frac{u_n}{1+u_n} \quad ; \quad \sum u_n u_{2n} \quad ; \quad \sum (e^{u_n} - 1) \quad ; \quad \sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$$

*Indice :* pour la dernière série, on pourra écrire  $\frac{\sqrt{u_n}}{n} = \sqrt{u_n} \times \sqrt{\frac{1}{n^2}}$  puis penser aux égalités remarquables.

### Exercice n° 10

---

Prouver que  $\sum \frac{1}{n \ln n}$  diverge.

### Exercice n° 11

---

Déterminer un équivalent des sommes partielles de  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

### Exercice n° 12

---

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum n^{-(1+(1/n))} ; \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) ; \sum \frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)} ; \sum n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}} ; \sum (\operatorname{ch} \sqrt{\ln n})^{-2}$$

*Indice : les deux derniers sont plus délicats, il faut réfléchir à ce quelle expression on aimerait avoir et raisonner par majoration.*

### Exercice n° 13

---

Calculer les sommes des séries suivantes (les calculs prouveront leurs convergences) :

a)  $\sum_{n \geq 0} (n+1)3^{-n}$  *Indice : on pourra calculer les sommes partielles multipliées par  $(1-3^{-1})$ .*

Revoilà des fractions rationnelles :

b)  $\sum_{n \geq 3} \frac{2n-1}{n^3-4n}$

c)  $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n^4+n^2+1}$  *Indice : on pourra astucieusement faire apparaître  $n+1$  dans  $n^2+n+1$ .*

## 4 Plus difficile

### Exercice n° 14

---

Soit  $a, b$  des réels strictement positifs. Etudier, selon  $a$  et  $b$  la nature de  $\sum \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}$ .

*Indice : On pourra distinguer plusieurs cas selon les valeurs prises par  $b$ .*

### Exercice n° 15

---

Etudier, selon les polynômes  $P$  et  $Q$  de  $\mathbb{R}[X]$ , la convergence de  $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$ .

### Exercice n° 16

---

a) Soit  $a, b$  deux réels positifs. Prouver que  $\arctan \frac{a-b}{1+ab} = \arctan a - \arctan b$ .

b) Après avoir justifié la convergence de  $\sum_{n \geq 0} \arctan \frac{1}{k^2+k+1}$  et  $\sum_{n \geq 1} \arctan \frac{2}{k^2}$ , calculer leurs sommes en se servant de la première question.

### Exercice n° 17

---

On appelle **série de Bertrand** les séries de la forme  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels.

Etudier la nature des séries de Bertrand (en fonction des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ ).

*Indice : on pourra faire une disjonction de cas selon les valeurs de  $\alpha$  puis, lorsque ce sera nécessaire, de  $\beta$ . Au final, un seul cas est compliqué, on pourra le traiter en se ramenant à une intégrale.*