Chapitre 10 - Fonctions : limites et continuité - Exercices

Vrai ou Faux ?

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément ou une borne de I. f et g sont des fonctions définie sur I.

i) Une fonction bornée admet des limites.
ii) Une fonction qui admet des limites est bornée.
iii) Une fonction continue bornée atteint ses bornes.
iv) Si f est continue sur I alors $|f|$ aussi.
v) Si $|f|$ est continue sur I alors f aussi.
vi) Si $f \circ g$ est continue alors f et g sont continues.
vii) Si f est continue sur $[a;b]$ et $f(a)f(b) < 0$ alors f s'annule sur $[a;b]$.
viii) Si f est continue sur $[a;b]$ et $f(a)f(b) > 0$ alors f ne s'annule pas sur $[a;b]$.
ix) Si $f(I)$ est un intervalle alors f est continue sur I.
x) Une fonction continue admet une réciproque continue.

1 Calculer des limites

Exercice n° 1

Lorsqu'elles existent, déterminer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2+2|x|}{x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x-1}{x^n-1}$ $(n \geq 1)$ f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$ g) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x+2}{x^2\ln x}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x\ln(x+\sqrt{x})$ j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-e^{x^2}}{x^2-x}$ k) $\displaystyle\lim_{x\to0} x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$ l) $\displaystyle\lim_{x\to0} x^2\lfloor\frac{1}{x^2}\rfloor$

Remarque : la notation lim *est abusive pour les limites qui n'existent pas.*

Exercice n° 2

Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$. Donner le domaine de définition de f.
Est-il possible de prolonger f par continuité ?

Exercice n° 3

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur les intervalles indiqués ?

$$f_1(x) = \tfrac{x^2-4}{x^3-2x^2+x-2} \text{ sur } \mathbb{R} \quad ; \quad f_2(x) = \tfrac{x-3}{x+1} \text{ sur } \mathbb{R} \quad ; \quad f_3(x) = x^x \text{ sur } \mathbb{R}^+$$

$$f_4(x) = \tfrac{\sin x}{x} \text{ sur } \mathbb{R} \quad ; \quad f_5(x) = x^{x^x} \text{ sur } \mathbb{R}^+ \quad ; \quad f_6(x) = \tfrac{x^2}{e^x-1} \text{ sur } \mathbb{R}$$

Exercice n° 4

Soit $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \text{ est un nombre premier} \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

2 Continuité sans TVI

Exercice n° 5

Existe-t-il des fonctions continues $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ qui sont surjectives ?

Exercice n° 6

On veut trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ qui vérifient $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}\ (\star)$.

1. Faire une figure et interpréter la relation fonctionnelle que vérifie une telle fonction.
2. Trouver une famille de fonctions qui vérifie la relation $(\star)$.
3. En s'aidant de l'écriture binaire des éléments de $[0;1]$, résoudre le problème posé.

Exercice n° 7

Montrer qu'une fonction continue qui est nulle sur $\mathbb{Q}$ est nulle sur $\mathbb{R}$.

3 TVI et applications

Exercice n° 8

1. Prouver que l'équation $\mathrm{e}^x + x = 0$ admet d'une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Programmer une fonction `alpha_precision(epsilon)` qui, étant donnée un réel $\varepsilon > 0$ renvoie une valeur approchée de α avec une précision ε.
3. Utiliser la fonction programmée à la question précédente pour fournir une valeur approchée à 10^{-6} de α.

Exercice n° 9

Pour les fonctions suivantes, déterminer l'image de l'intervalle I proposé.

$$f_1(x) = \frac{x+1}{x^2-1},\ I_1 = [0;1[\quad ; \quad f_2(x) = x^4 - 4x + 3,\ I_2 = \mathbb{R}^{-*} \quad ; \quad f_3(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,\ I_3 = \mathbb{R}^+$$

Exercice n° 10

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $|f|$ est constante. Montrer que f est constante. Ce résultat est-il toujours vrai si f est à valeurs complexes ?

Exercice n° 11

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f(\mathbb{R}) \subset g(\mathbb{R})$. Montrer que les courbes représentatives de f et de g se croisent.

Exercice n° 12

Une voiture parcourt 100 km en 1h. Justifier qu'il existe au moins un quart d'heure pendant lequel la voiture a parcouru exactement 25 km.

4 Plus difficile

Exercice n° 13

La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^x}$ admet-elle une limite en $+\infty$.

Exercice n° 14

Trouver toutes les fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(\frac{x}{2})$.

Exercice n° 15

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2 \leq f(x)f(y)$.

Montrer que E est stable par somme et par produit.