Chapitre 7 - Compléments sur les complexes - Exercices

Vrai ou Faux ?

a) Tout complexe non nul s'écrit de façon unique $re^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta \leq \pi$.
b) Soit z un complexe non nul. Arg $z = \frac{\mathrm{Im} z}{\mathrm{Re} z}$
c) Un polynôme du second degré dont les coefficients sont réels a des racines réelles.
d) Un polynôme du second degré dont les coefficients sont des complexes non réels a des racines complexes non réelles.
e) Tout complexe admet deux racines carrées.
f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n racines $n-$ièmes de l'unité.
g) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme des racines $n-$ièmes de l'unité est nulle.
h) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, ω une racine $n-$ième de l'unité. $\overline{\omega}$ est aussi une racine $n-$ième de l'unité.
i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, ω une racine $n-$ième de l'unité. $-\omega$ est aussi une racine $n-$ième de l'unité.
j) Dans le plan complexe $z \mapsto \mathrm{i}z$ correspond à une rotation.

1 Nombres complexes et trigonométrie

Exercice n° 1

Soit $t \in [0; 2\pi]$. Donner le module et un argument de $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.
Factoriser.

Exercice n° 2

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.
Faire apparaître exp, utiliser la formule du binôme puis factoriser.

Exercice n° 3

Résoudre l'équation différentielle $y' - 5y = \cos 4x \sin x$.
Utiliser l'exp complexe.

Exercice n° 4

Donner une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x} \cos x$.
Utiliser l'exp complexe.

2 Forme exponentielle d'un complexe

Exercice n° 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 4\overline{z}$.
Quelle forme utiliser ?

Exercice n° 6

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 - 2z^3 \cos \varphi + 1 = 0$.
Faire un changement de variable.

Exercice n° 7

Soit a, b, c trois complexes (non nuls) de même module. Montrer que $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ est réel.
Quelle forme utiliser ? Factoriser.

Exercice n° 8

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $\mathrm{e}^z = -2$; $\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 1$ et $\mathrm{e}^z + 2\mathrm{e}^{-z} = \mathrm{i}$.
Attention au nombre de solutions. Se ramener à des équations du second degré pour les 2 dernières.

Exercice n° 9

Soit $n \leq 2$, un entier, soit $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Que vaut $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$?
Utiliser l'expression des racines n-ièmes de 1.

3 Nombres complexes et géométrie

Exercice n° 10

On travaille dans le plan complexe. Soit $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts. Quelles sont les affixes c possibles pour que ABC soit rectangle et isocèle en $C(c)$?
Faire une figure. Formuler en terme de transformation géométrique.

Exercice n° 11

On travaille dans le plan complexe. Soit, pour tout entier naturel n, les points $A_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}})$. On construit alors, la famille de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante : $M_0 = A_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_{n+1} est le projeté orthogonal de M_n sur la droite (OA_{n+1}).
Déterminer l'affixe complexe de M_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
Faire une figure.

4 Plus difficile

Exercice n° 12

Soit n un entier naturel non nul, x un réel tel que $\frac{x}{2}$ n'est pas congru à 0 modulo π. Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cos \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Exercice n° 13

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} (-1)^k 2^k$.
Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \frac{1}{2}\left((1 + i\sqrt{2})^n + (1 - i\sqrt{2})^n\right)$.

Exercice n° 14

Soit n un entier naturel non nul, on note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de 1. Les deux questions peuvent être traitées dans l'ordre de votre choix.

1. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{U}_n} (1+z)^n$.
2. Vérifier le résultat trouvé à la question précédente (ou conjecturez ce qu'il faut trouver si vous ne l'avez pas traitée) à l'aide de Pyhton.

Exercice n° 15

Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. On pose $x = \tan \frac{\theta}{2}$.

1. Prouver que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \dfrac{1 + \mathrm{i}x}{1 - \mathrm{i}x}$.

2. En déduire $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de x.
3. Soit $t \in]-\pi;\pi[$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta}$.