Chapitre 12 - Dérivation - Exercices

Vrai ou Faux ?

f désigne une fonction, définie et dérivable sur $\mathcal{D}_f$. a est un point intérieur de $\mathcal{D}_f$ (c'est-à-dire qu'il existe un intervalle ouvert inclus dans $\mathcal{D}_f$ qui contient a).

i) Si f' est de signe constant sur $\mathcal{D}_f$ alors f' est monotone sur $\mathcal{D}_f$.

ii) Si f' est monotone sur $\mathcal{D}_f$ alors f' est de signe constant sur $\mathcal{D}_f$.

iii) Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

iv) Si $f'(a) = 0$ alors f admet un extremum local en a.

v) Le théorème de Rolle est valable pour les fonctions réelles à valeurs comlplexes.

vi) Le théorème des accroissements finis est valable pour les fonctions réelles à valeurs comlplexes.

vii) L'inégalité des accroissements finis est valable pour les fonctions réelles à valeurs comlplexes.

1 Dérivabilité en un point

Exercice n° 1

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \geq 0 \\ x^3 \text{ si } x < 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \qquad f_3(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \leq 0 \\ \sin x \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} x^2 - 3 \text{ si } x < 0 \\ x^2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \qquad f_5(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

Exercice n° 2

On considère la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^3 \text{Arcsin } x}$.

a) Etudier la dérivabilité de f en 0.

b) Pouvait-on aboutir à ce résultat par opérations ?

Exercice n° 3

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^3 + 2$.

a) Justifier l'existence d'une bijection réciproque f^{-1}.

b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 4

Soit la fonction $f(x) = x^2 \left(1 + \cos^2 \frac{1}{x}\right)$.

1. Justifier qu'on peut prolonger f par continuité en 0 et qu'alors f admet un minimum en 0.
2. À l'aide de Geogebra, observer que f n'est ni localement décroissante à gauche en 0, ni localement croissante à droite en 0.

Nous avons observé dans les exercices précédents :

- une fonction continue mais qui n'est dérivable ni à gauche, ni à droite, en un point ;
- une fonction dont la dérivabilité en un point n'est pas prédite par les formules de calcul sur les dérivées (qui permettent de prouver simplement la dérivabilité mais pas la non-dérivabilité) ;
- une fonction dérivable et bijective dont la réciproque n'est pas dérivable partout à cause de points d'annulation de la dérivée.
  Géométriquement, si la courbe de f admet une tangente horizontale alors la courbe de f^{-1} qui est déduite de celle de f par symétrie orthogonale d'axe $x = y$ admet une tangente verticale.
- Une fonction qui admet un minimum global en un point sans que la fonction soit localement décroissante à gauche et croissante à droite en ce point.

2 Calculer des dérivées

Exercice n° 5

A l'aide des formules de dérivation usuelles, calculer les dérivées des fonctions suivantes *(dans un premier temps, on ne tiendra pas compte des domaines de définition et de dérivabilité)* :

$$f_1(x) = 3^x \qquad f_2(x) = (7x+1)e^{-0,2x^2+x} \qquad f_3(x) = \arcsin(x^2)$$

$$f_4(x) = \arctan(\ln x) \qquad f_5(x) = \sqrt{x^2+1} \qquad f_6(x) = x\arccos(\tfrac{1}{x})$$

Exercice n° 6

Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions :

$$\cos \quad ; \quad \sin \quad ; \quad f(x) = \ln(3x+1) \quad ; \quad g(x) = x^2(1+x)^n \quad \text{et} \quad h(x) = \cos(x)\sin(x)$$

3 Utiliser la dérivation

Exercice n° 7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{xf(2) - 2f(x)}{x-2}$

Exercice n° 8

Etudier les variations de $x \mapsto \sin x - x + \frac{x^3}{6}$.

Exercice n° 9

Déterminer le minimum de $x \longmapsto x^3 + x^{-2}$.

Exercice n° 10

Prouver que $\forall x \geq 0,\ x \leq \mathrm{e}^x - 1 \leq x\mathrm{e}^x$.

Exercice n° 11

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que si $f(x) = 0$ a $k+1$ solutions alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(k)}(\alpha) = 0$.

Exercice n° 12

Prouver que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ |\mathrm{Arctan}\ x - \mathrm{Arctan}\ y| \leq |x-y|$.

4 Plus difficile

Exercice n° 13

Généraliser le théorème de Rolle aux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui ont la même limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice n° 14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels dont la somme est nulle.
Justifier qu'il existe un réel $b \in]0;1[$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka_k b^{k-1} = 0$.

Exercice n° 15

Soit $f : [0;a] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0;a]$ tel que $f'(c) = \dfrac{2f(a) + af'(a)}{3a}$.

Exercice n° 16

Soit $a > 0$, f et g deux fonctions continues sur $[0; a]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; a]$, qui vérifient $f(0) = g(0) = 0$ et telles que g et g' ne s'annulent pas sur $]0; a]$.

a) Soit $x \in]0; a]$. Appliquer le théorème de Rolle à $t \longmapsto f(x)g(t) - f(t)g(x)$.

b) En déduire que si $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe aussi et que ces limites sont égales. *(Règle de l'Hospital)*