Chapitre 14 - Matrices - Exercices

Vrai ou Faux ?

A, B et C désignent des matrices.

i) Multiplier par une matrice nulle ne donne pas nécessairement une matrice nulle.

ii) Si AB est une matrice carrée alors A et B sont également carrées.

iii) Si B et C sont de même taille et que $AB = AC$ alors $B = C$.

iv) Deux matrices triangulaires supérieures (de même taille) commutent.

v) Si A est inversible alors $2A$ est inversible.

vi) Si A est inversible alors A^p est inversible pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

vii) Une matrice triangulaire supérieure dont le produit des termes diagonaux est nul n'est pas inversible.

viii) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, $A \underset{c}{\sim} I_n$.

ix) Si A et B sont dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $A + B$ aussi.

x) Si A et B sont dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et commutent alors A^{-1} et B^{-1} commutent également.

1 Calculer

Exercice n° 1

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n° 2

Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 3

Soit $n \geq 2$. Déterminer l'inverse de la matrice $n \times n$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice n° 4

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'objectif de cet exercice est de trouver une expression pour A^n ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Justifier que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.
2. Calculer $P^{-1}AP$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer D^n.
4. En déduire une expression pour A^n ($n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice n° 5

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on considère la matrice $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. (a) Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $A(\theta)A(\varphi)$.
   (b) Que vaut $(A(\theta))^n$ pour $n \geqslant 1$?

(c) $A(\theta)$ est-elle inversible ?

2. On travaille dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Les vecteurs, exprimés dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, sont réprésentés en colonnes ; on identifie donc l'ensemble $\overrightarrow{P}$ des vecteurs du plan à l'ensemble des colonnes à deux lignes.
Soit l'application $f_\theta : \begin{cases} \overrightarrow{P} \longrightarrow \overrightarrow{P} \\ \vec{u} \longmapsto A(\theta)\vec{u} \end{cases}$.
(On dit que f_θ est l'application linéaire canoniquement associée à $A(\theta)$).
   (a) Quelles sont les images de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ par f_θ.
   (b) Justifier que f_θ est linéaire.
   (c) Sur une figure, représenter $\vec{i}, \vec{j}, f_\theta(\vec{i})$ et $f_\theta(\vec{j})$, puis interpréter géométriquement l'action de f_θ sur les vecteurs du plan.

Exercice n° 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on travaille dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ est dite **stochastique** lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, a_{i,j} \in [0;1] \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1;n]\!], \ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

Dans la suite, X désigne la colonne de taille n qui ne comporte que des 1

1. Donner deux exemples de matrices stochastiques.
2. Prouver que si A est stochastique alors $AX = X$.
3. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à coefficients positifs et vérifie $AX = X$ alors A est stochastique.
4. Prouver que l'ensemble des matrices stochastiques est stable par produit.
5. Une matrice stochastique est-elle nécessairement inversible ?
6. Si A est une matrice stochastique inversible, montrer que $A^{-1}X = X$. Peut-on en déduire que A^{-1} est stochastique ?

Exercice n° 7

Soit $\in \mathbb{N}^*$. Prouver que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice n° 8

Soit A, B des matrices antisymétriques de même taille. Montrer que $AB - BA$ est également antisymétrique.

2 Plus difficile

Exercice n° 9

On dit qu'une matrice carrée A est **nilpotente** lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que A^n est la matrice nulle.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice triangulaire supérieure soit nilpotente.
2. Si A est nilpotente de taille n, prouver que $A - I_n$ est inversible.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice n° 10

(D'après Banque PT)

On appelle **trace** d'une matrice carrée A la somme de ses éléments diagonaux ; on note $tr\ A$.
Par exemple, $tr \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} = 3$.

1. Soit A et B deux matrices carrées de même taille. Prouver que $tr(AB) = tr(BA)$.
2. S'il en existe, trouver des matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_3$.