Chapitre 8 - Suites - Exercices

Vrai ou Faux ?

i) Une suite bornée est convergente.

ii) Une suite stationnaire est bornée.

iii) Soit $x \in \mathbb{R}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son approximation décimale. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

iv) Soit f une fonction croissante. Toute suite u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante.

v) Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont croissantes, alors u est croissante.

vi) Une suite géométrique décroissante à une raison positive.

vii) Si u est une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n}{u_{n+1}} < 1$ alors u est monotone.

viii) Si u et v ont la même limite (finie ou infinie) alors uv a une limite.

ix) Si u et v sont des suites qui convergent avec $u < v$ alors $\lim u < \lim v$.

x) Si u est une suite qui diverge alors ses suites extraites divergent.

1 Généralités sur les suites

Exercice n° 1

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \frac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$

a) Soit $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x+2}$. Montrer que $\forall x \in [0;1], f(x) \in [0;1]$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

b) Etudier la monotonie de u, en déduire que u converge vers un réel ℓ.

c) Déterminer ℓ.

Exercice n° 2

On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{u_n+2} \end{cases}$

a) Prouver que $\forall x \in [1;2], \sqrt{x+2} \in [1;2]$. En déduire que la suite u est bien définie.

b) Prouver que u est strictement croissante, puis que u converge.

c) Déterminer la limite de u.

2 Limites

Exercice n° 3

Dans les situations suivantes, il faut trouver (si c'est possible) des exemples de suites u et v satisfaisant les conditions données.

a) $u \to +\infty$, $v \to +\infty$ et $\dfrac{u}{v} \to 0$

b) $u \to +\infty$, $v \to +\infty$ et $\dfrac{u}{v} \to 2$

c) $u \to +\infty$, $v \to +\infty$ et $\dfrac{u}{v} \to -\infty$

d) $u \to +\infty$, $v \to +\infty$ et $\dfrac{u}{v} \to +\infty$

e) $u \to +\infty$, $v \to -\infty$ et $\dfrac{u}{v} \to 5$

f) $u \to +\infty$, $v \to +\infty$ et $\dfrac{u}{v}$ n'a pas de limite.

Exercice n° 4

Etudier les limites éventuelles des suites suivantes :

$$\left(n\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad ; \quad \left(n^4-n^2-1\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad ; \quad \left(n\cos(\pi n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad ; \quad \left((0.3)^n-\pi^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\left(\frac{3n+2^n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad ; \quad \left(\frac{\lfloor n\rfloor}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad ; \quad \left(\frac{\lfloor\sqrt{2n}\rfloor}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad ; \quad \left(\frac{n^3}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

Exercice n° 5

On considère la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}^*, S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$.

1. Etudier les variations de S. Que peut-on en déduire sur le comportement asymptotique de S ?
2. Justifier que $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ 0<\dfrac{1}{(k+1)^2}<\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ *(Faire une figure)*
3. En conclure que S converge.

Exercice n° 6

Soient $a_0<b_0$ deux réels. On définit par récurrence les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{2a_n+b_n}{3} \\ b_{n+1} &= \frac{a_n+2b_n}{3}\end{cases}$$

1. Prouver que $(a_n-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. En déduire une expression de a_n-b_n en fonction de n.
2. Prouver que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. En calculant a_n+b_n, trouver leur limite commune

Exercice n° 7

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n!}$ sont adjacentes puis utiliser Python pour émettre une conjecture sur la limite commune de ces suites.

3 Plus difficile...

Exercice n° 8

Pour $n>1$, soit la fonction $f_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^k-1$.

1. Prouver que $f_n(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$. On la note a_n.
2. Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel $\ell\in[0;1[$.
3. Prouver que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n<\frac{2}{3}$.
4. Déterminer ℓ.

Exercice n° 9

Que dire du comportement asymptotique d'une suite de complexe z vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N},\ z_{n+1}=\frac{z_n+|z_n|}{2}$?