

## Chapitre 10 - Systèmes linéaires - Exercices

### Vrai ou Faux ?

$n$  et  $p$  désignent des entiers naturels non nuls.

- i) Un système linéaire compatible est homogène.
- ii) Un système linéaire peut avoir exactement une solution.
- iii) Un système linéaire peut avoir exactement deux solutions.
- iv) Un système linéaire ayant plus d'inconnues que d'équations ne peut avoir une unique solution.
- v) Une famille de deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  est liée si, et seulement si, ses vecteurs sont colinéaires.
- vi) Si une famille de  $p$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  est liée alors  $p > n$ .
- vii) Si une famille de  $p$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  est libre alors  $p \leq n$ .
- viii) Il faut au moins  $n$  vecteurs pour avoir une famille génératrice de  $\mathbb{R}^n$ .
- ix) Une famille de vecteurs peut être simultanément libre et génératrice.
- x) Une famille de vecteurs peut être simultanément liée et génératrice.

### 1 Résoudre des systèmes

#### Exercice n° 1

---

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_1) : \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases} & \quad (\mathcal{S}_2) : \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + 2y - z = -3 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases} \\ (\mathcal{S}_3) : \begin{cases} 3y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 2y + 2z = -3 \end{cases} & \quad (\mathcal{S}_4) : \begin{cases} x + y + z = 15 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

#### Exercice n° 2

---

On travaille dans l'espace muni d'un repère orthonormé. Soit  $A(3; -2; 0)$ .

- a) En utilisant le produit scalaire, déterminer une équation cartésienne du plan orthogonal à  $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ .
- b) Résoudre le système : 
$$\begin{cases} 3x + 5y - 3z + 1 = 0 \\ x - 2y + z - 4 = 0 \\ 7x - 3z + 5 = 0 \end{cases}$$
 puis interpréter géométriquement le résultat trouvé.

#### Exercice n° 3

---

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Résoudre le système : 
$$\begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ 3x + 2y + z = a + 3 \\ 7x + 4y - 5z = 2a + 5 \end{cases}$$

#### Exercice n° 4

---

Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ . Résoudre le système : 
$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

#### Exercice n° 5

---

Soit  $n \geq 3$ . Résoudre le système : 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + z_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2z_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nz_n = 1 \end{cases}$$

### Exercice n° 6

---

Soit  $n \geq 3$ . Résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ \vdots & \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n & = 0 \\ x_{n-1} + x_n & = 0 \end{cases}$$

## 2 Plus difficile

### Exercice n° 7

---

Soit  $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ . Combien existe-t-il de polynômes  $P$  de degré 2 qui vérifient  $P(1) = a$ ,  $P(2) = b$  et  $P(3) = c$  ?

### Exercice n° 8

---

Soit  $\mathcal{F}$  une famille finie de vecteurs. Montrer  $\mathcal{F}$  est libre si, et seulement si, il existe un des vecteurs de  $\mathcal{F}$  qui est combinaison linéaire des autres.

### Exercice n° 9

---

**Définition :** Soit  $A$  une matrice. On appelle **noyau** de  $A$ , l'ensemble des colonnes  $X$  tel que  $AX$  est la colonne nulle.

1. Déterminer le noyau de  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ .
2. Le noyau d'une matrice peut-il être vide ?
3. Prouver que le noyau d'une matrice est stable par combinaison linéaire.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le noyau soit réduit à la colonne nulle.