Chapitre 11 - Systèmes linéaires - Exercices

Vrai ou Faux ?

n et p désignent des entiers naturels non nuls.

i) Un système linéaire compatible est homogène.
ii) Un système linéaire peut avoir exactement une solution.
iii) Un système linéaire peut avoir exactement deux solutions.
iv) Un système linéaire ayant plus d'inconnues que d'équations ne peut avoir une unique solution.
v) Une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est liée si, et seulement si, ses vecteurs sont colinéaires.
vi) Si une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est liée alors $p > n$.
vii) Si une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre alors $p \leq n$.
viii) Il faut au moins n vecteurs pour avoir une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.
ix) Une famille de vecteurs peut être simultanément libre et génératrice.
x) Une famille de vecteurs peut être simultanément liée et génératrice.

1 Résoudre des systèmes

Exercice n° 1

Résoudre les systèmes suivants :

$$(\mathcal{S}_1) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & + & 3z & = & 8 \\ x & + & 2y & - & z & = & -3 \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S}_2) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & + & 3z & = & 8 \\ x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ x & + & y & + & 2z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$(\mathcal{S}_3) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 3y & - & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & -1 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & -3 \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S}_4) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 15 \\ x & - & y & + & 2z & = & 5 \end{array}\right.$$

Exercice n° 2

On travaille dans l'espace muni d'un repère orthonormé. Soit $A(3;-2;0)$.

a) En utilisant le produit scalaire, déterminer une équation cartésienne du plan orthogonal à $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{r} 3x+5y-3z+1=0 \\ x-2y+z-4=0 \\ 7x-3z+5=0 \end{array}\right.$ puis interpréter géométriquement le résultat trouvé.

Exercice n° 3

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 3z & = & a \\ 3x & + & 2y & + & z & = & a+3 \\ 7x & + & 4y & - & 5z & = & 2a+5 \end{array}\right.$.

Exercice n° 4

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{cccccc} ax & +by & +z & = & 1 \\ x & +aby & +z & = & b \\ x & +by & +az & = & 1 \end{array}\right.$.

Exercice n° 5

Soit $n \geq 3$. Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{cccccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +\dots & +x_n & = & 1 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +\dots & +2x_n & = & 1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +\dots & +nx_n & = & 1 \end{array}\right.$.

Exercice n° 6

Soit $n \geq 3$. Résoudre le système : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \ddots \qquad \vdots \\ z_{n-2} + z_{n-1} + z_n = 0 \\ z_{n-1} + z_n = 0 \end{cases}$.

2 Plus difficile

Exercice n° 7

Soit $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$. Combien existe-t-il de polynômes P de degré 2 qui vérifient $P(1) = a,\ P(2) = b$ et $P(3) = c$?

Exercice n° 8

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs. Montrer $\mathcal{F}$ est libre si, et seulement si, il existe un des vecteurs de $\mathcal{F}$ qui est combinaison linéaire des autres.

Exercice n° 9

Définition : Soit A une matrice. On appelle **noyau** de A, l'ensemble des colonnes X tel que AX est la colonne nulle.

1. Déterminer le noyau de $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Le noyau d'une matrice peut-il être vide ?
3. Prouver que le noyau d'une matrice est stable par combinaison linéaire.
4. Donner une condition nécessaure et suffisante pour que le noyau soit réduit à la colonne nulle.