Pour chaque point pour lequel vous n'êtes pas complètement, absolument, intégralement sûr de vous, il ne suffit pas de voir le cours. Retournez aux exercices faits en classe au cours de l'année.

## 1 | Rappels PCSI

Tout ce qui a été vu en PCSI doit être su. Voici quelques points en particulier à surveiller :

1. Théorème des accroissement finis, théorème de Rolle, avec démonstrations.
2. Equivalents, petit $o$, grand $O$
3. Trouver **un** équivalent aux suites définies par par $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$ ; $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
4. Donner un sous-ensemble de l'ensemble des suites dont les termes sont équivalents en $+\infty$ à $\frac{1}{n}$. Faire de même pour 0 (en $+\infty$).
5. Inégalités des accroissements finis et sa démonstration
6. Chercher des exemples de récurrence simple, double, forte. Quelles sont les différences ?
7. On dispose des inégalités suivantes $7 \leq a < w$ et $z < b < -3$. En déduire un encadrement de la quantité $a - b$.

**Solution:**
•Il n'y a **pas un unique** équivalent, mais plusieurs, par définition même.
Ici $u_n = \frac{2n}{n^2+1} \sim \frac{2}{n}$ ; $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \sim \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$
On ne soustrait ni n'additionne les équivalents ! Si besoin, on peut soustraire ou additionner des D.L., puis en déduire un équivalent.
•Il n'existe aucune suite dont les termes sont équivalents à 0 (qu'est-ce que cela voudrait dire ?). Le seul sous-ensemble envisageable est donc $\emptyset$. **On ne confond pas la limite et un équivalent**.
•Récurrence : pour une récurrence double, on doit avoir une initialisation et une hérédité double. La récurrence forte nécessite pour l'hérédité de disposer de toutes les hypothèses de récurrence du rang initial au rang $n$ pour disposer de la propriété au rang $n+1$.
•Attention au sens des inégalités lorsqu'on soustrait. "Ajouter" une inégalité large à une inégalité stricte donne bien sûr une inégalité stricte : $10 < a - b < w - z$.

## 2 | Suites récurrentes

Donner une expression du terme des suites suivantes.

1. $u_1 = 2$ et pour tout $n \geq 1$, $3u_{n+1} = 5u_n - 2$
2. $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$.

**Solution:**
•Suite arithmético-géométrique. On commence par trouver la limite éventuelle d'une telle série : $3l = 5l - 2$, soit $l = 1$. On soustrait ensuite terme à terme les deux inégalités : $3u_{n+1} - 3l = (5u_n - 2) - (5l - 2)$ soit $3(u_{n+1} - l) = 5(u_n - l)$. On note alors $v_n = u_n - l$. La suite $v$ est géométrique. $v_n = q^{n-1}v_1 = \left(\frac{5}{3}\right)$. On en déduit $u_n$.
•Il faut étudier le polynôme $X^2 - 4X + 3$. Trois cas : deux racines réelles, une racine réelle double, deux racines non réelles conjuguées. Ici, on est dans le premier cas. Il y a deux racines $r_1$ et $r_2$. Les termes de la suite sont de la forme $\lambda r_1^n + \mu r_2^n$. On utilise les valeurs connues de $u_1$ et $u_2$ pour trouver $\lambda$ et $\mu$. ($\lambda = 1,5$, $\mu = 1/6$, racines : 2 et 3)
L'étape de vérification est très importante. Calculez à l'aide de la formule de récurrence la valeur de $u_3$ et comparez-la avec l'expression fonction de $n$ que vous avez trouvé.
Si vous vous êtes trompé, c'est probablement une erreur d'attention : refaites le calcul jusqu'à comprendre votre erreur.
Allez voir la méthode de résolution des autres cas.
Voyez-vous le lien avec les résolutions de certaines équations différentielles ? (Et donc l'économie d'apprentissage)

## 3 | Polynômes d'endomorphismes

1. Factoriser les polynômes suivants : $X^2 - 1$, $X^4 + 6X^3 + 11X^2 + 6X$
2. Appliquer les polynômes suivants à une matrice carrée quelconque $A$ d'ordre $n$ : $X^2$ ; $X + 1$ ; $X^3(4X - 2)$
3. En notant $P$, $Q$, $R$ les trois polynômes précédents, calculer $(PQ)(A)$, $(QP)(A)$, $P(A)Q(A)$, $Q(A)P(A)$. Qu'observer ?
4. Que vaut $P(T)$, si $P$ est le polynôme $X^2 - 3$ et $T$ l'application qui à $x$ associe $x + 1$ ?

**Solution:**
•lorsqu'on doit factoriser un polynôme, on pense aux identités remarquables et aux racines "évidentes" (0, 1, -1, 2, -2).
•1 correspond à la matrice identité (d'ordre $n$). Si on applique le polynôme à un endomorphisme $u$, 1 correspond à l'endomorphisme identité. On obtient ici $A^2$ ; $A + I_n$,, $A^3(4A - 2I_n)$
•Les calculs mènent au même résultat (et c'est normal !). Si on s'était intéressé à un endomorphisme $u$, on aurait obtenu les égalités suivantes : $PQ(u) = P(u)oQ(u) = Q(u)oP(u)$.
•Il faut comprendre que $X^2(T) = ToT$. Ainsi, on obtient l'application qui, à $x$, associe $(x + 1) + 1 - 3x$ (soit $2 - 2x$)

## 4 | Rappels sur les matrices

1. Exprimer **dans une base donnée** la matrice d'une application linéaire.
2. Vérifier que la dérivation est une application linéaire de $\mathbb{R}_5[X]$ dans $\mathbb{R}_4[X]$.
3. En donner la matrice dans les bases canoniques de ces e.v.
4. Diagonaliser la matrice suivante $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$

**Solution:**
• $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
• On observe que la matrice est de rang 1. Puisqu'elle est de taille 4, par le théorème du rang, son noyau est de dimension 3. On trouve facilement que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la v.p. 30. On obtient donc $\dim E_{30}(A) \geq 1$. La somme des dimensions des sous espaces propres est au moins de 4 (et ne peut excéder 4), elle vaut donc 4 : la matrice est diagonalisable. Ses valeurs propres sont 0, de multiplicité 3, et 30, v.p. simple. Il reste à calculer des vecteurs propres pour la v.p. 0, pour obtenir la matrice de passage $P$, qu'il faut ensuite inverser et $A = PDP^{-1}$.
⚠Les valeurs propres sont dans le même ordre dans $D$ que les vecteurs propres correspondants dans $P$.
**A retenir** Le rang, la trace, le déterminant s'il est donné, etc. sont des informations qui peuvent simplifier l'étude et/ou la diagonalisation d'une matrice.

5 | Diagonalisabilité

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $A$ est diagonalisable de quatre manières :
   (a) sans calcul
   (b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$ et en déterminant les soues-espaces propres
   (c) en utilisant le rang de la matrice
   (d) en calculant $A^2$
2. On suppose que $A$ est la matrice d'un endomorphisme $u$ d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale.

**Solution:**
•symétrique réelle
•$\lambda^2(\lambda - 3)$. $E_0(A)$ est de dimension 2 (calcul de vecteurs propres).
•matrice de rang 1, donc valeur propre 0 double. Trace non nulle, donc une valeur propre non nulle (3), puis $\dim E_0(A) + \dim E_3(A) = 3$.
•$A^2 = 3A$ : on trouve un polynôme annulateur de $A$ scindé à racines simples : $X^2 - 3X$.

6 | Rappels sur les matrices - contres-exemples

1. Montrer que le déterminant de la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ n'est pas forcément $AD - BC$ (*i.e.* exhiber un contre-exemple)
2. Trouver une matrice symétrique non diagonalisable
3. Théorème spectral

**Solution:**
•$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour déterminant $-21$ et non 0.
•La matrice $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique et non diagonalisable. Son polynôme caractéristique est $(x+1)(x-1)+1 = x^2$ qui n'a que 0 pour racine. Si cette matrice était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, ce qui est bien sûr absurde.
☞**Les matrices <u>réelles</u> symétriques sont diagonalisables à valeurs réelles, dans une base orthonormale.**

## 7 | Polynômes d'endomorphismes - annulateur - caractéristique

1. Soit $A$ une matrice d'ordre $n$. Exprimer $P(A)$, où $P = X^2 - 5X + 3X^3/12 + 7$
2. Soient $P$ et $Q$ deux polynômes de votre choix. Calculer $P(A)$, $Q(P(A))$ et $(P \times Q)(A)$. Que constater ?
3. Polynôme caractéristique, polynôme annulateur, théorème de Cayley-Hamilton
4. Si $(X-3)(X^2+1)$ annule $A$, que peut-on dire des valeurs propres de $A$ dans $\mathbb{R}$ ? Et dans $\mathbb{C}$ ?
5. Si $A$ est une matrice réelle d'ordre 2, quel peut être son polynôme caractéristique ?
6. Critères de diagonalisabilité et de trigonalisabilité
7. Vrai ou faux :
   (a) $X - 2$ est le polynôme caractéristique de $2I_2$
   (b) Si le polynôme caractéristique de $A$ est scindé, alors $A$ est diagonalisable
   (c) Si $P$ annule $A$, alors les racines de $P$ sont des valeurs propres de $A$
8. Vrai ou faux : Soit $A$ une matrice d'ordre $n$. Si $A^2 - 3A + 2I_n = 0$, alors $A$ est diagonalisable
9. Montrer que si $X_1, ..., X_n$ sont des vecteurs propres de $A$ d'ordre $n$ associés à $\lambda_1, ..., \lambda_n$, en notant $P$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont $X_1, ..., X_n$, alors $A = P\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1}$

**Solution:**
• L'unité 1 du polynôme devient l'unité des matrices $I_n$. Donc 7 appliqué en $A$ donne $7I$.
$P(A) = A^2 - 5A + 3\frac{1}{4}A^3 + 7I_n$. *Exercez-vous avec d'autres polynômes jusqu'à ce qu'il n'y ait plus aucun doute.*
On remarque que pour tous polynômes $P$ et $Q$, et toute matrice $A$, $Q(P(A) = (P \times Q)(A)$
• Il n'y a qu'**un** polynôme caractéristique, mais il y a une infinité de polynômes annulateurs d'une matrice. Tous les multiples du polynôme caractéristiques de $A$ annulent bien $A$ !
• Les valeurs propres d'une matrices sont **parmi** les racines d'un polynôme annulateur de $A$. Dans $\mathbb{R}$ : 3. Dans $\mathbb{C}$ : 3, $i$ et $-i$.
•Tout est faux : le polynôme caractéristique d'une matrice d'ordre $n$ est de degré $n$ ; Si $P$ annule $A$, les valeurs propres de $A$ font partie des racines de $P$ (il n'y a pas égalité entre les ensembles)
•Si on connaît un polynôme scindé à racines simples qui annule $A$, alors $A$ est diagonalisable. Or $A^2 - 3A + 2I_n = (X^2 - 3X + 2)(A)$ et $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$. C'est donc vrai.
•$AX_i = \lambda_i X_i$ pour tout $i$, ce qui permet de comprendre que $AP = (\lambda_1 X_1, ..., \lambda_n X_n) = P\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

## 8 | Calcul de primitives

1. Primitives usuelles
2. Décomposition en éléments simples
3. Décomposition en éléments simples de $\frac{3x+7}{(x+1)^2}$

**Solution:**
•Il ne suffit pas de lire les primitives usuelles, il faut se tester : donner une primitive de $\frac{u'}{u}$, la dérivée de arctan, de arcsin, etc.
•$\frac{3}{x+1} + \frac{4}{x+1}^2$

## 9 | Equations différentielles

1. Quels sont les types d'équations différentielles vues cette année ?
2. Résoudre $y' + 3xy = 2e^{-3\frac{x^2}{2}}$
3. Résoudre $y'' - 3y' + 2y = 2e^{2t}$
4. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccc} x' & = & x + 2y - z \\ y' & = & 2x + 4y - 2z \\ z' & = & -x - 2y + z \end{array}\right.$

**Solution:**
•Toujours vérifier que la solution qu'on a trouvé convient (détection d'erreur de calcul). Faites attention à l'intervalle sur lequel on résout. Solutions : $\{x \mapsto (2x + \lambda)e^{-3\frac{x^2}{2}} | \lambda \in \mathbb{R}\}$.
•$X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$. $S = \{t \mapsto 2te^{2t+\lambda e^t + \mu e^{2t}} | (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. Vérifiez que vous maîtrisez également les autres cas (pour la solution particulière : exposant non racine, exposant racine double de l'équation caractéristique ; pour la résolution de l'équation homogène : racine double, racines complexes conjuguées).
•On observe la matrice permettant de réécrire ce système. Elle est diagonalisable avec $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre 0 , $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (valeur propre 0), $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (valeur propre 6). Les solutions sont de la forme $t \mapsto \alpha e^{0t} X_1 + \beta e^{0t} X_2 + \gamma e^{6t} X_3$, avec $\alpha, \beta, \gamma$ dans $\mathbb{R}$.

On aurait pu aussi diagonaliser la matrice et résoudre chaque équation différentielle "simple".
Bien vérifier que vous savez résoudre les cas où la matrice est diagonalisable mais seulement dans $\mathbb{C}$, non diagonalisable, mais trigonalisable. Il peut également y avoir un second membre au système.

## 10 | Théorème du rang - calcul de déterminants

1. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Si le noyau de $A$ est de dimension $k$, quel est le rang de $A$ ?
2. Revoir exercices de PCSI de calculs de déterminants.
3. Calculer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

**Solution:**
•On fait bien attention aux espaces de départ et d'arrivée. $n = \dim \ker A + \text{rg} A$
•La somme des éléments de chaque ligne de $XI_n - A$ vaut $X - 4$. On peut ainsi simplifier le calcul du déterminant et arriver à $(X - 2)(X - 4)^2$

## 11 | Leibniz et Newton

1. Binôme de Newton (et hypothèses), formule de Leibniz
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En observant que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculer $A^n$.
3. Justifier l'existence de $exp(A)$ puis en donner la valeur.
4. Quelle est la dérivée de $t \mapsto tA$ ? Celle de $t \mapsto exp(tA)$ ?
5. En déduire la solution de l'équation différentielle $X' = AX$.
6. Revoir exercices de PCSI de calculs de déterminants.
7.

**Solution:**
•Hypothèse pour pouvoir utiliser la formule du binôme de Newton : il **faut** que les éléments commutent. Remarquer la parenté de la formule de Leibniz avec celle du binôme de Newton.
•On note $N$ la seconde matrice de cette somme. Les matrices $I_3$ et $N$ commutent. On peut donc utiliser la formule du binôme de Newton. Comme de plus pour tout $n > 1$, $N^n = 0$, on en déduit que, pour $n > 1$, $A^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} N^i I^{n-i} = \binom{n}{0} N^0 I^n + \binom{n}{1} N^1 I^{n-1} = I + nN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
•Il faut passer par les normes ! Puisqu'on travaille sur un e.v. de dimension finie, on peut utiliser la norme de notre choix. Y a -t-il convergence ? Pourquoi ? Vers quoi ? (On peut utiliser la formule $e^{(A+B)} = e^A e^B$, mais il **faut** alors mentionner que $A$ et $B$ commutent).
•Les dérivées sont $t \mapsto A$ et $t \mapsto Aexp(tA)$.
•$X(t) = \exp(tA)X(0)$. Le calcul permet de conclure.

## 12 | Distance à un s.e.v.

1. Distance à un s.e.v.
2. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
3. Rendre compte sur un schéma du projeté orthogonal sur un s.e.v. d'un vecteur $u$, y faire figurer également la distance de $u$ au s.e.v.
4. Si on dispose d'une base orthonormée de $F$ s.e.v. de $E$, quelle est la méthode la plus rapide pour calculer le projeté d'un vecteur $u$ de $E$ sur $F$ ?
5. Quelle est l'autre méthode ?
6. Soient $(a, b, c)$ une base orthonormée de $F$ s.e.v. de $E$, et $u$ un vecteur de $E$ vérifiant $(u|a) = 1$, $(u|b) = 2$ et $(u|c) = 1$. Donner une expression du projeté de $u$ sur $F$, et de la distance de $u$ à $F$ en utilisant ces données.
7. Quelle est la distance du vecteur $(1, 1, 1)$ au s.e.v. $F$ de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(0, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$ ?

**Solution:**
•$p_F(u) = a + 2b + c$ ; $d(u, F) = ||u - a - 2b - c||$.
•La base est orthogonale mais pas orthonormée. On normalise le second vecteur pour obtenir $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. La distance cherchée vaut $||(1,1,1) - ((1,1,1)|(0,1,0))\,(0,1,0) - \left((1,1,1)|(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})\right)(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})|| = ||(1,1,1) - (0,1,0) - \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1)|| = ||(0,0,0)|| = 0$.

Raisonnement alternatif ? On remarque que le vecteur $(1, 1, 1)$ est combinaison linéaire des deux vecteurs engendrant $F$. La distance cherchée est donc nécessairement nulle. C'est plus rapide ainsi, mais il faut savoir utiliser le calcul lorsque les données sont moins sympathiques !

## 13 | Matrices orthogonales

1. caractérisations d'une matrice orthogonale
2. matrice orthogonale directe dimension 3

   Soit $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4+\sqrt{3} & 1-2\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1+2\sqrt{3} & 4-\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 \\ 3\sqrt{3}-1 & -1-3\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de déterminant 1.

   (a) Vérifier que $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice $A$

   (b) Caractériser l'endomorphisme représenté par la matrice $A$. *S'aider de la calculatrice pour un calcul de déterminant*

   (c) Pour aller plus loin : se donner un vecteur de $\mathbb{R}^3$, un angle $\theta$, en déduire la matrice d'axe orienté par ce vecteur, d'angle $\theta$.
3. Soit $B = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Quel est le déterminant de cette matrice ? De quel type est l'endomorphisme représenté par $B$ ?

   (b) Vérifier que le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $B$ associé à la valeur propre $-1$.

   (c) A l'aide de la trace de la matrice, montrer que $E_{-1}(B)$ est de dimension 1.

   (d) Caractériser l'endomorphisme représenté par la matrice $A$.

**Solution:**

•déterminant 1 ? On vérifie que $AA^T = I_3$. C'est le cas, alors c'est la matrice d'une isométrie directe. Le vecteur proposé par l'énoncé est bien vecteur propre associé à la valeur propre 1. C'est un vecteur invariant par la transformation représentée par $A$. Autrement dit, c'est un vecteur de l'axe de la rotation. Il reste à trouver l'angle. La trace vaut 2, donc $\cos(\theta) = 1/2$, soit $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$.

Le vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $u$, et appartient donc au plan dans lequel s'effectue la rotation. On calcule $w = Av$, puis le déterminant de $(u, v, Av)$, qui est négatif. L'endomorphisme cherché est donc la rotation d'axe dirigé par $u$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

•Le déterminant de $B$ vaut $-1$ et $B$ est une matrice orthogonale, qui représente donc dans la base canonique $f$, une isométrie vectorielle indirecte. La trace vaut $\frac{2}{3}$ donc $-1$ n'est pas valeur propre de $B$ de multiplicité 3. Plus précisément, il existe une base orthonormée dans laquelle $f$ est représenté par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On sait de plus que $\frac{2}{3} = -1 + 2\cos\theta$, soit $\theta = \pm\arccos\frac{5}{6}$ (modulo $2\pi$).

Une étude des sous-espaces propres montre que $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur orientant l'axe de l'endomorphisme. On trouve encore que $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $u$ et on calcule le vectur $Av = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

On trouve le signe de $\theta$ en calculant le déterminant de $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Ce déterminant est négatif, ainsi $\theta = -\arccos\frac{5}{6}$.

L'endomorphisme ici est la composée d'une rotation d'axe $u$ et d'une symétrie par rapport au plan orthogonal à $u$.
Si l'angle est nul (soit si la trace vaut 1), il s'agit d'une symétrie orthogonale par rapport au plan propre pour la valeur propre 1 ; si $\theta = \pi$ (donc si $-1$ est valeur propre triple), on peut également décrire l'endomorphisme comme une symétrie centrale.

## 14 | Croissances comparées

1. Théorème des croissances comparées. A ne pas utiliser pour d'autres fonctions que celles répertoriées ! Savoir redémontrer ce théorème assure de l'utiliser à bon escient.
2. Exemple : par croissances comparées, $\frac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ ; $xe^x \underset{x\to-\infty}{\to} 0$ ; $x\ln x \underset{x\to 0^+}{\to} 0$
3. Si $x^2 f(x) \underset{x\to\infty}{\to} 0$ par croissances comparées, alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$. La fonction $f$ est alors intégrable au voisinage de $+\infty$
4. Montrer que $\ln(x+1) - \ln(x) \underset{x\to\infty}{\to} 0$

**Solution:** On ne peut simplement dire que *telle chose marche* *par croissances comparées*. En revanche, on peut remarquer que, pour $x > 0$, $\ln(x+1) - \ln(x) = \ln(x(1+1/x)) - \ln(x) = \ln(x) + \ln(1+1/x) - \ln(x) = \ln(1+1/x) \underset{x\to\infty}{\to} 0$ par continuité de la fonction ln en 0. Autrement dit, attention à ne pas utiliser les **croissances comparées** à toutes les sauces, en particulier lorsqu'il n'y en a pas besoin !

## 15 | Nombres complexes - révision des bases

1. Quel est le module des nombres $3e^{7i}$ ; $3+4i$ ; $3e^{3+2i}$ ?
2. Quel est l'argument de ces nombres ?
3. Quel est le nombre d'ordonnée strictement négative dont le cube vaut 1 ?
4. Mettre sous forme algébrique le nombre complexe $z = \frac{1}{1+i}$
5. Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe $z = 1 + \sqrt{3}i$

**Solution:**
•3 ; $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$ ; $3\cos(3)$
•7 (soit $\frac{7}{\pi}\pi$) ; $\arctan\frac{4}{3}$ ; 2. Seul le deuxième point peut éventuellement poser problème et est à traiter avec précautions. Les angles s'entendent toujours modulo $2\pi$
•C'est $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, souvent noté $-j$ ou $j^2$.
•Réflexe ! On multiplie au numérateur et au dénominateur par le conjugué. De la même manière qu'on se débarrasse d'une racine carrée au dénominateur en multipliant par la quantité conjuguée.
**Attention !** Si le réflexe ne permet pas d'aboutir, on le laisse bien sûr de côté pour tenter autre chose.
Ici, $z = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
•On calcule le module et l'argument. $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

## 16 | Loi faible des grands nombres

1. Inégalité de Markov, Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres avec démonstration
2. On demande à $n$ personnes pour quel candidat parmi $A$ et $B$ elles souhaitent voter. On considère que le vote suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$. Combien de personnes, en fonction de $p$, faut-il interroger pour avoir 92% de chances de tomber, avec notre sondage (en moyenne), sur une évaluation correcte à plus ou moins 3% près ?
3. Même question, mais avec 99% de chances, et une fourchette de 10%.

**Solution:**
La loi faible des grands nombres est ce qui nous éclaire ici. On ne peut pas assurer l'existence d'un nombre minimal $n$ de personnes tel que la réponse tombe *assurément* dans $[p-3\%, p+3\%]$, mais on peut assurer l'existence d'un nombre minimal $n$ de personnes à sonder tel que la réponse tombe avec probabilité choisie, dans un intervalle choisi centré en $p$.

Puisque le vote suite une loi de Bernoulli de paramètre $p$, $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1-p)$. D'après la loi faible des grands nombres, $P(|\frac{\sum_i X_i}{n} - E(X_1)] > \varepsilon) \leq \frac{V(X_1)}{n\varepsilon^2}$.
Cette loi affirme que la probabilité d'être **éloigné** de la moyenne d'au moins (strictement) $\varepsilon$ est inférieure ou égale à une quantité $\alpha$. La probabilité d'être proche de ou égal à $E(X_1)$ d'au plus (au sens large) $\varepsilon$ est supérieure à $1-\alpha$.
Donc $P(|\frac{\sum_i X_i}{n} - p] \leq 3\%) \geq (1 - \frac{p(1-p)}{n3\%^2})$. Et assurer que cette probabilité est supérieure à 92%, c'est imposer $(1 - \frac{V(X)}{n\varepsilon^2}) \geq 92$, soit $n \geq \frac{p(1-p)}{3\%\times3\%\times8\%}$.
Si $p = 0,48$, il faudra interroger au moins 3467 personnes. Si $p = 0,12$, 1467 personnes suffiront.

Cet exercice est à refaire jusqu'à comprendre comment utiliser la loi faible des grands nombres.

## 17 | Les convergences

1. convergence d'une suite, d'une série numérique, convergence absolue d'une série
2. convergence simple, uniforme, normale. Savoir quantifier ces différentes convergences.
3. Montrer que la suite des fonctions $x \mapsto x^n$ converge simplement sur $[0,1]$, et calculer la limite.
4. La convergence uniforme d'une suite de fonctions continues implique la continuité de la limite de cette suite. Montrer que la suite des fonctions $x \mapsto x^n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.
5. Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ défini pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
6. Qu'en est-il de la convergence normale sur $\mathbb{R}^+$ ?

**Solution:** La convergence simple vers 0 de la suite des reste ne permet pas d'affirmer la CVU mais seulement la CVS ! La convergence uniforme sur tout segment inclus dans $I$ ne permet pas d'affirmer la convergence uniforme sur $I$ tout entier.
•On peut en revanche majorer le reste de la suite par $|u_n(x)|$, à l'aide du CSSA. Or, $|u_n(x)| = \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. La majoration doit ne pas dépendre de $x$ ! Cela vous rappelle-t-il d'autres théorèmes ?
•Pour la convergence normale, on prend la borne sup de chaque fonction, et c'est la série de ces bornes sup qui doit converger. Or sur $\mathbb{R}^+$, la borne sup de $|u_n|$ (ne pas oublier les valeurs absolues !) vaut $\ln(1 + 1/n)$ et $\sum \ln(1 + 1/n)$ ne converge pas. (équivalence + série harmonique)

## 18 | Série entière

Rayon de série entière : savoir utiliser autre chose que d'Alembert.

1. définition du rayon d'une série entière
2. Quelles sont les méthodes pour calculer le rayon d'une série entière (*A retenir :* Il existe d'autres méthodes que l'utilisation de la règle de d'Alembert ! Et si c'est cette règle qui est retenue, penser à utiliser les valeurs absolues ou à mentionner la positivité des termes )
3. Déterminer le rayon des séries entières $\sum x^n$, $\sum (n+3)x^n$, $\sum (1-(-1)^n)x^n$, $\sum \frac{x^n}{n!}$, $\sum \cos(nx)x^n$.
4. Déterminer une solution DSE à l'équation $(1-x)y' - y = 0$ sur $]-1,1[$.
   solution DSE equa diff, ou déterminer equa diff par SE : calculs rarement terminés a cause d'une mauvaise manipulation des indices. : -> retour à calcul.
5. On ne mélange pas DL et DSE, ni série entière et polynôme !

**Solution:**
Si on veut déterminer une solution DSE d'une équation, ou si on veut déterminer une équation vérifiée par une série entière, il faut être **très attentif aux erreurs potentielles de calculs**, en particulier en ce qui concerne les indices. Il faut également être capable de justifier la dérivabilité terme à terme de la série.
Ici, on suppose que la solution s'écrit sous la forme $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$. Alors l'équation devient
$(1-x)\sum\limits_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} - \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, qui nous mène à $(a_1 - a_0) + \sum\limits_{n\geq 1}(n+1)(a_{n+1} - a_n)x^n) = 0$, soit, pour tout $n \geq 1$, $a_n = a_0$.
Toute série qui convient s'écrit sous la forme $\sum\limits_{n\geq 0} a_0 x^n$, et on reconnaît la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. On mentionne le rayon de la série entière, qu'on rapporte à l'intervalle sur lequel on souhaitait résoudre l'équation différentielle. Sur l'intervalle ouvert de convergence, la fonction trouvée est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il n'y a pas besoin de vérifier que les solutions trouvées sont bien solution de l'équation différentielle : elles le sont, par construction.

## 19 | Lois usuelles

1. Pour chaque loi usuelle, trouver un exemple, une situation (simple, si possible)
2. Pöur chaque loi usuelle, en tracer la fonction de répartition.
3. Lois usuelles, leur espérance, variance, fonction génératrice. Connaître, et savoir recalculer.
4. Copies d'élèves (fictives !) : trouver les erreurs :
   (a) $E(A) = \sum_i p(w_i \in A)$
   (b) Si $X(n) = 1$ si $n$ est pair, 0 sinon, pour $n \in [\![0, 5]\!]$, $P(1) = 1/6$
   (c) $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$ car $X$ et $Y$ sont indépendantes.
   (d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**Solution:**
•lancer de dé ; lancer de dé jusqu'à obtenir un 6 ; lancer de $n$ dé et comptage des 6 sortis, etc...
•confusion évènement - variable aléatoire. C'est $P(A)$ qui est calculé ici.
•confusion nombre, variable aléatoire. Il aurait fallu écrire $P(X = 1)$
•Non ! C'est par linéarité de l'espérance, et vrai que les v.a. soient indépendantes ou non.
•Peut être vrai, mais il faut justifier ! Par exemple, par additivité de la probabilité, et il **faut** mentionner/prouver que $A$ et $B$ sont des évènements **incompatibles**.

## 20 | Vocabulaire des probabilités

Revoir formule des probabilités composées

1. Formule des probabilités composées.
2. Un navigateur se déplace entre plusieurs villes. On connaît la probabilité d'aller d'une ville $A$ à une ville $B$ pour tous les couples de villes $(A, B)$. Comment calculer la probabilité qu'il se trouve au temps $t+1$ à Paris, connaissant les probabilités d'être dans chaque ville au temps $t$ ?
3. Si on veut exprimer $\mathrm{P(X = k)}$ en fonction de $\mathrm{P(X = k/y = n)}$ : penser à la formule des probabilités totales.

**Solution:** Il **faut** montrer qu'on dispose d'un S.C.E., puis mentionner que l'on peut utiliser la formule des probabilités totales.
De manière générale, il **faut** utiliser le vocabulaire spécifique : évènements disjoints, indépendants, élémentaires . . .

## 21 | Courbes paramétrées

1. Algorithme d'étude d'une courbe paramétrée.
2. Tracer des courbes correspondant aux cas suivants :
   (a) $x$ : croissante, de limite $-4$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$, $y$ croissante, de limite $-\infty$ en $-\infty$, de limite $+\infty$ en $+\infty$. En $+\infty$, limite de $\frac{y(t)}{x(t)}$ vaut $+\infty$.
   (b) $x$ : décroissante, de limite $-4$ en $-\infty$ et $-7$ en $+\infty$, $y$ croissante, de limite $-2$ en $-\infty$, de limite $-3$ en $+\infty$. Limite en $-\infty$ de $\frac{y'}{x'}$ : 3. Limite en $+\infty$ de $\frac{y'}{x'}$ : -1.
   (c) $x$ : croissante, de limite $-4$ en $-1$ et $+\infty$ en 1, $y$ croissante, de limite $-\infty$ en $-1$, de limite $+\infty$ en $+1$. $t$ appartient à $]-1, 1[$. En 1, limite de $\frac{y(t)}{x(t)}$ vaut 3, et $y(t) - 3x(t)$ tend vers 2 quand $t$ tend vers 1.
3. Reprendre les exemples déjà étudiés, et découper le tableau de variation de $x$ et $y$ en parties où ces fonctions sont monotones, puis effectuer le tracé de la courbe.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, t.q. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, .)$ et $f(., y)$ sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction $f$ est-elle continue ?
2. Soit $A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}$. Exprimer de deux manières différentes la dérivée de $f : t \mapsto \det A(t)$
3. longueur arc paramétré
4. Soit $C$ la courbe d'équation cartésienne $y = \operatorname{ch} x - 1$. En paramétrant la courbe, calculer la longueur de l'arc $OA$, où $A$ est le point d'abscisse 1.

**Solution:**
•Non ! Voici un contre-exemple à garder en mémoire : $(x, y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. On remarque que $f(x, x) \underset{x\to 0}{\rightarrow} 0$ et $f(x, 2x) \underset{x\to 0}{\rightarrow} -\frac{3}{5}$.
•D'une part, le déterminant de $A(t)$ vaut $2t^2-1$, dont la dérivée se calcule aisément, d'autre part, la formule de la dérivée de $B(f, g)$ avec $B$ bilinéaire est connue et est égale à $B(f', g)+B(f, g')$. Ici, on obtient : $B'(f, g) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} t & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2t + 2t$.
On a bien retrouvé la même dérivée.
Attention à ne pas mélanger les applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, ni les applications partielles, avec les applications coordonnées !
•On peut choisir $x$ comme paramètre, et alors $x(t) = t$, et $y(t) = \operatorname{ch} t - 1$. Le point $O$ est le point de paramètre 0, le point $A$ est celui de paramètre 1. Il faut calculer $\int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2} = \int_0^1 \sqrt{1 + \operatorname{sh} 2} = \int_0^1 \operatorname{ch} = \operatorname{sh} 1$.