

# Différents Formulaires

Pour simplifier les calculs

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Alphabet Grec dans l'écriture scientifique</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Formulaire Trigonométrique</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Formulaire de trigonométrie hyperbolique</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Dérivées des fonctions usuelles</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Autour des Primitives</b>	<b>8</b>
5.1	Tableau des primitives usuelles . . . . .	8
5.2	Opérations usuelles . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Autour des développements limités</b>	<b>11</b>
6.1	Règles de calculs sur les développements limités . . . . .	11
6.2	Tableau des développements limités usuels . . . . .	13
6.3	Développements limités obtenus par intégration . . . . .	14
<b>7</b>	<b>Les développements en séries entières usuels à connaître ou à savoir retrouver</b>	<b>15</b>
7.1	Variable complexe . . . . .	15
7.2	Variable réelle . . . . .	15
7.2.1	Obtenu par la série exponentielle . . . . .	15
7.2.2	Obtenu par la méthode de l'équation différentielle . . . . .	15
7.2.3	Obtenu par intégration du développement précédent pour $\alpha$ particulier .	15

# 1 Alphabet Grec dans l'écriture scientifique

Lettre grecque minuscule	Lettre grecque majuscule	Prononciation	Lettre latine équivalente
$\alpha$	A	alpha	a
$\beta$	B	beta	b
$\gamma$	Γ	gamma	g
$\delta$	Δ	delta	d
$\varepsilon$	E	epsilon	e
$\zeta$	Z	zêta	z
$\eta$	H	êta	h
$\theta$	Θ	thêta	q
$\iota$	I	iota	i
$\kappa$	K	kappa	k
$\lambda$	Λ	lambda	l
$\mu$	M	mu	m
$\nu$	N	nu	n
$\xi$	Ξ	xi ou ksi	c
$\omicron$	O	omicron	o
$\pi$	Π	pi	p
$\rho$	P	rho	r
$\sigma$	Σ	sigma	s
$\tau$	T	tau	t
$\upsilon$	Υ	upsilon	u
$\phi$	<i>Phi</i>	phi	f
$\chi$	X	chi ou khi	x
$\psi$	Ψ	psi	y
$\omega$	Ω	omega	w

## 2 Formulaire Trigonométrique

**Formule de Moivre** :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n$$

**Formules d'Euler** :  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

**Relations trigonométriques diverses** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\forall x \neq \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

**Formules d'addition** :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

De ces formules, on en déduit **des formules de linéarisation, de transformation de sommes en produits** :

$$\begin{aligned}\cos(p) + \cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos(p) - \cos(q) &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) + \sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) - \sin(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{aligned}$$

qu'il n'est pas utile de connaître par cœur mais plutôt savoir les retrouver à partir des formules d'addition.

On a aussi ;

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a).$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a.$$

A partir desquelles on obtient, en particulier (utile pour intégrer) :

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}.$$

$$\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}.$$

### 3 Formulaire de trigonométrie hyperbolique

**Définition :** On appelle :  
**sinus hyperbolique** l'application

$$\begin{aligned} \text{sh} : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

**cosinus hyperbolique** l'application

$$\begin{aligned} \text{ch} : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

**tangente hyperbolique** l'application

$$\begin{aligned} \text{th} : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \end{aligned}$$

En utilisant les définitions de ch, sh, th, on obtient aisément les formules suivantes, pour tous  $x, a, b$  de  $\mathbf{R}$  :

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1 \text{ A connaître absolument.}$$

$$\text{ch}(a + b) = \text{ch } a \text{ ch } b + \text{sh } a \text{ sh } b.$$

$$\text{ch}(a - b) = \text{ch } a \text{ ch } b - \text{sh } a \text{ sh } b.$$

$$\text{sh}(a + b) = \text{sh } a \text{ ch } b + \text{ch } a \text{ sh } b.$$

$$\text{sh}(a - b) = \text{sh } a \text{ ch } b - \text{ch } a \text{ sh } b.$$

$$\text{th}(a + b) = \frac{\text{th } a + \text{th } b}{1 + \text{th } a \text{ th } b}.$$

$$\text{th}(a - b) = \frac{\text{th } a - \text{th } b}{1 - \text{th } a \text{ th } b}.$$

$$\text{ch}(2a) = \text{ch}^2 a + \text{sh}^2 a = 2\text{ch}^2 a - 1 = 1 + 2\text{sh}^2 a.$$

$$\text{sh}(2a) = 2 \text{ch } a \text{ sh } a.$$

$$\text{th}(2a) = \frac{2 \text{th } a}{1 + \text{th}^2 a}.$$

$$\text{ch}^2 a = \frac{\text{ch}(2a) + 1}{2}.$$

$$\text{sh}^2 a = \frac{\text{ch}(2a) - 1}{2}.$$

## 4 Dérivées des fonctions usuelles

$f$	Domaine de Définition	$f'$	Domaine de Dérivabilité
$x \mapsto k \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	0	$\mathbf{R}$
$x^n, n \in \mathbb{Z}^*$	$\mathbf{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ , $\mathbf{R}^*$ sinon	$nx^{n-1}$	$\mathbf{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ , $\mathbf{R}^*$ sinon
$\sqrt{x}$	$\mathbf{R}^+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbf{R}_+^*$
$\ln(x)$	$\mathbf{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbf{R}_+^*$
$e^x$	$\mathbf{R}$	$e^x$	$\mathbf{R}$
$\cos(x)$	$\mathbf{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbf{R}$
$\sin(x)$	$\mathbf{R}$	$\cos(x)$	$\mathbf{R}$
$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\text{Arccos}(x)$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\text{Arcsin}(x)$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\text{Arctan}(x)$	$\mathbf{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbf{R}$

$f$	Domaine de Définition	$f'$	Domaine de Dérivabilité
$\text{ch}(x)$	$\mathbf{R}$	$\text{sh}(x)$	$\mathbf{R}$
$\text{sh}(x)$	$\mathbf{R}$	$\text{ch}(x)$	$\mathbf{R}$
$\text{th}(x)$	$\mathbf{R}$	$1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$	$\mathbf{R}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}_*^+$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbf{R}_*^+$

## 5 Autour des Primitives

### 5.1 Tableau des primitives usuelles

Dans la première colonne figure la fonction  $f$  dont on veut donner les primitives.  
Dans la deuxième colonne, se trouve **une** primitive de  $f$ .  
Dans la troisième colonne, se trouve le domaine de définition des primitives. En particulier, on ne peut intégrer  $f$  que sur un intervalle inclus dans ce domaine.



Fonction $f, f(x)$	Primitive $F, F(x)$	Domaine de définition de $F$
$e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbf{R}^*$ fixé	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{ch} \omega x (\omega \in \mathbf{R}^*)$	$\frac{1}{\omega} \operatorname{sh} \omega x$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{sh} \omega x (\omega \in \mathbf{R}^*)$	$\frac{1}{\omega} \operatorname{ch} \omega x$	$\mathbf{R}$
$\cos \omega x (\omega \in \mathbf{R}^*)$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega x$	$\mathbf{R}$
$\sin \omega x (\omega \in \mathbf{R}^*)$	$-\frac{1}{\omega} \cos \omega x$	$\mathbf{R}$
$\tan x$ $\operatorname{th} x$	$-\ln   \cos x  $ $\ln \operatorname{ch} x$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ (\pi)$ $\mathbf{R}$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	$\operatorname{th} x$	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ (\pi)$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R} - \mathbb{Z}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbf{R}_+^*$
$x^n, n \in \mathbb{Z} - \{0, -1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln  x $	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{ax+b}, (a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$	$\frac{1}{a} \ln  ax+b $	$] -\infty, -\frac{b}{a}[$ ou $]\frac{b}{a}, +\infty[$
$\frac{1}{a^2+x^2} (a \neq 0)$	$\frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a}$	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} (a > 0)$	$\operatorname{Arcsin} \frac{x}{a}$ ou $-\operatorname{Arccos} \frac{x}{a}$	$] -a, a[$

## 5.2 Opérations usuelles

Fonction $f, f(x)$	Primitive $F, F(x)$	Commentaires
$a f', a$ réel	$a f$	
$f' + g'$	$f + g$	
$f' f^n, n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} f^{n+1}$	sur tout intervalle où $f(x) \neq 0$ si $n < 0$
$\frac{f'}{f}$	$\ln  f $	sur tout intervalle où $f(x) \neq 0$
$f' \times (g \circ f)$	$g \circ f$	

## 6 Autour des développements limités

### 6.1 Règles de calculs sur les développements limités

Les propriétés sont énoncées pour des développements limités au voisinage de zéro.

On considère deux fonctions  $f$  et  $g$  définies au voisinage de zéro admettant chacune un développement limité d'ordre  $n$

$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$

$$g(x) = Q(x) + o(x^n)$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes de degré inférieur à  $n$ , qu'on appelle *parties régulières* respectivement de  $f$  et  $g$ .

Rappelons les méthodes pour obtenir les développements limités d'une somme, produit, composée et quotient :

#### Linéarité :

Pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $\lambda f + g$  admet un développement limité en 0 à l'ordre  $n$  et

$$\lambda f(x) + g(x) = \lambda P(x) + Q(x) + o(x^n)$$

#### Produit :

$fg$  admet un développement limité d'ordre  $n$  et sa partie régulière s'obtient en formant le produit  $PQ$  et en ne retenant que les termes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

#### Composée :

On suppose que  $f(0) = 0$ .

$g \circ f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  et sa partie régulière s'obtient en ne retenant du polynôme  $Q \circ P$  que les termes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

#### Quotient :

On suppose que  $f(0) \neq 0$ .

Alors  $\frac{1}{f}$  admet un développement limité d'ordre  $n$  et pour l'obtenir, on écrit :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a(1 - u(x))}$$

et on effectue le  $DL_n(0)$  de la composée des fonctions  $u(x)$  et  $\frac{1}{a} \frac{1}{1-x}$ .

Des exemples :

1)  $DL_7(0)$  de  $\ln(\cos(x))$  :

On écrit le DL de  $\cos$  :

$$\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)\right)$$

On utilise le développement limité de  $\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} + o(z^3)$  : L'ordre 3 suffit car on l'utilise pour  $z = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$  et on cherche un  $DL_7(0)$  par rapport à  $x$ .

Alors, finalement

$$\begin{aligned} \ln(\cos(x)) = & -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right) \\ & -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right)^2 \\ & -\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right)^3 \\ & + o(x^7) \end{aligned}$$

On ne retient que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à 7. Il s'ensuit que :

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^7)$$

2)  $DL_5(0)$  de  $\tan(x)$  :

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} \end{aligned}$$

On utilise maintenant le développement limité de  $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + o(z^2)$  : L'ordre 2 suffit car on l'utilise pour  $z = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$  et on cherche un  $DL_5(0)$  par rapport à  $x$ .

Alors, finalement

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} \\ &= \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right) \left( 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} \right)^2 + o(x^5) \right) \end{aligned}$$

On ne retient que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à 5. Il s'ensuit que :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

## 6.2 Tableau des développements limités usuels

Tous les développements limités cités ci-dessous sont au voisinage de 0.

### I. Développements limités obtenus par le théorème de Taylor-Young

Ordre	DL(0)
n	$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
2n+1	$\operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
2n+2	$\operatorname{sh}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
2n+1	$\cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
2n+2	$\sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
n	$\forall \alpha \in \mathbf{R}, (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
n	$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
n	$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

### 6.3 Développements limités obtenus par intégration

Ordre	DL(0)
n	$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
n	$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n) = -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
2n+2	$\operatorname{Arctan} x = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
2n+2	$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
2n+2	$\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} - \dots - \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$

## 7 Les développements en séries entières usuels à connaître ou à savoir retrouver

### 7.1 Variable complexe

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1, \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

### 7.2 Variable réelle

#### 7.2.1 Obtenu par la série exponentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

#### 7.2.2 Obtenu par la méthode de l'équation différentielle

$$\forall x \in ]-1, 1[, \forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

#### 7.2.3 Obtenu par intégration du développement précédent pour $\alpha$ particulier

$$\forall x \in ]-1, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in ]-1, 1[, \ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in ]-1, 1[, \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in ]-1, 1[, \operatorname{Arcsin} x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in ]-1, 1[, \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$