PSI **Février 2023**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Intégrales à Paramètre

Exercice 1. :(extraît CCP 2003 et DS4).

Soit $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} dt.$

1. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0.$
2. Montrer que φ est C^2 sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x) = 0.$
3. Calculer $\varphi''(x)$, $\varphi'(x)$. En déduire $\varphi(0)$.
4. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$

Exercice 2. CCPINP PSI 2021

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} \,\mathrm{d}t.$

1. Domaine de définition de f ?
2. f est-elle continue sur D_f ?
3. Montrer $x \in D_f \Longrightarrow 1-x \in D_f$ et $f(1-x) = f(x)$.
4. Trouver un équivalent de f en chacune des bornes de D_f.

Exercice 3. CCPINP PSI 2021

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} \,\mathrm{d}t$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Calculez $f(x-1) - f(x)$ pour $x > 0$ et en déduire une expression de $f(x)$ sous la forme d'une somme de série.
4. Proposer une autre méthode pour obtenir ce résultat.

Exercice 4. CCINP PSI 2021

Soient $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t} \,\mathrm{d}t$ et D son domaine de définition.

1. Montrer $]-1,1[\subset D$.
2. Trouver un développement en série entière de F.
3. Montrer F de classe C^1 sur $[0,1[$.
4. Fournir une expression simple de F' sur $[0,1[$.
5. Proposer une autre méthode pour aboutir à ce résultat.

Exercice 5. (ENSIEE 2012) Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}} dt$.

1. Montrer que f est C^1 sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en 0.
3. Donner un équivalent de f en 0.
4. Etablir que f est solution d'une équation différentielle linéaire.

Exercice 6. (Niveau Mines-Centrale)

1. Montrer
$$\forall t \in]0,1[,\ 0 \leq \ln(1+t) \leq -\ln(1-t)$$
et en déduire
$$\forall \theta \in [0,\pi], \forall t \in]0,1[,\ |\ln(1+t^2+2t\cos\theta)| \leq 2|\ln(1-t)|$$
2. Montrer que, pour tout θ de $[0,\pi]$, la fonction $t \longmapsto \frac{\ln(1+t^2+2t\cos\theta)}{t}$ est intégrable sur $]0,1[$. On pose alors
$$\forall \theta \in [0,\pi], F(\theta) = \int_0^1 \frac{\ln(1+t^2+2t\cos\theta)}{t} dt$$
3. Calculer $F(\pi)$ à l'aide du DSE de $\ln(1-t)$.
4. Montrer que F est continue sur $[0,\pi]$ et C^1 sur $]0,\pi[$.
5. En déduire l'expression de F sur $[0,\pi]$.
6. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$.