PSI **Novembre 2016**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Intégration sur un intervalle quelconque
Intégrales Généralisées

Exercice 1. (CCP 2015)
Montrer la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{4x^3 - x}\,\mathrm{d}x$ et la calculer.

Exercice 2. Soit $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-kt^2}}{k^2+1}$, pour t réel.

1. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
3. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, laquelle ?
4. Indiquer l'allure de la représentation graphique de la fonction f (on ne cherchera pas à préciser $f(0)$).
5. La fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?
6. Soit $F : x \mapsto \int_0^{x+1} f(t)dt$.
   (a) Indiquer l'allure de la représentation graphique de la fonction F.
   (b) La fonction F est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?
   (on pourra comparer $F(x)$ et $f(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}^+$).

Exercice 3. 1. Pour quelles valeurs de x, l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$ existe-t-elle ?.

2. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.
3. Démontrer que $f(x+1)$ est bornée pour $x \geq 0$.
4. Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 4. (Télécom SudParis 2015)

1. Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$ où $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer la convergence et calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)P_m(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in]0,1[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^{2n+1}\ln(x)}{x^2-1}$ et $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$.

1. Montrer que f et f_n sont intégrables sur $]0,1[$.
2. On considère $I_n = \int_0^1 f_n(x)ds$. Montrer que $(I_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.
3. Calculer $I_{k+1} - I_k$ et en déduire que $I_n = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 6. On pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx$

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$
2. Montrer que $I_n \sim \dfrac{\alpha}{n}$ où $\alpha = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$

Exercice 7. (CCP 2015)

La série de terme général $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa somme ?

Exercice 8. (CCP 2015)

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$ est convergente.
2. Montrer que $I = \int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t$ existe.
3. Montrer que $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $\int_0^1 t^n \ln^p(t)\,\mathrm{d}t$ existe et la calculer.
4. En déduire que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Exercice 9.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2. Trouver une suite $(a_n)_n$ dans $\mathbb{Q}_+^*$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exercice 10. (Mines 2015)

1. Domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$.
2. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer cette intégrale.

Exercice 11. (Mines 2015)

1. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(nx)\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$ existent pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation entre I_n et J_n.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation entre J_n et J_{n+1}.
4. Calculer I_0 (*On montrera que* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$)
5. Calculer I_n.

Exercice 12. (Mines 2014)

1. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{sh} t}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{sh} t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2 + 1}$.