

Feuille d'Exercices
Intégration sur un intervalle quelconque

Exercice 1. 1. Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+2)(t+1)} dt$.

2. Convergence et calcul de $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

3. Après avoir justifié son existence, calculer $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$.

4. Nature de $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\ln(t))^2}{\sqrt{t}} dt$.

5. Nature de $\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln t}}{t^3} dt$.

6. Nature de $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^a(\ln(t))^b} dt$ suivant les valeurs de a et b .

Exercice 2. Après avoir justifié son existence, calculer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 (\ln(t))^n dt$.

Exercice 3. (IMT 2021-2019)

Justifier la convergence et calculer $\int_0^{+\infty} \left(1 - t \arctan \frac{1}{t}\right) dt$.

Exercice 4. 1. Justifier que $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1} dt$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1} dt$ existent.

2. Montrer que $I=J$ calculer $I+J$ et en déduire I .

Exercice 5. Donner l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

Exercice 6. 1. Pour quelles valeurs de x réel peut-on définir $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-2x}}{1+t^2} dt$?

2. Donner une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

3. Calculer $f(0)$. En déduire $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. 1. Montrer que $g_n : x \mapsto \frac{x^n}{(x^2(1-x))^{1/3}}$ est intégrable sur $]0,1[$.

2. Donner une formule de récurrence sur $J_n = \int_0^1 g_n(t) dt$.

3. En déduire J_n .

Exercice 8. 1. Prouver que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$ converge.

2. Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{t} dt$.

Exercice 9. 1. Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

2. Etablir $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$.

3. En séparant cette dernière intégrale en deux, observer $I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx$

4. Donner la valeur de I

Exercice 10. Etudier l'intégrabilité :

1. sur $]0, 1[$ de $f : t \mapsto \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{4}}} dt$.

2. sur $]0, +\infty[$ de $f : x \mapsto \frac{2(1-\cos x)}{x^2+x^3}$.

3. sur \mathbb{R}_*^+ de $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x+x^2}}$

Exercice 11. (CCP 2016) Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$.

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $\int_0^1 t \lfloor \frac{1}{t} \rfloor dt$ converge et la calculer.

Exercice 12. (Mines 2021) Soit $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que f est définie sur $]0, +\infty[$. Montrer que f est dérivable sur I et déterminer f' .

2. Déterminer un équivalent de f en 0 et $+\infty$.

3. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est définie et la calculer.