Interro sur Devoir Surveillé $n°4$
PSI
MATHEMATIQUES

Problème 1

Notations et définitions

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Notons $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$,

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$,
0_n la matrice nulle d'ordre n
et I_n la matrice identité d'ordre n.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ker}\,(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ tel que } MX = 0\}, \\ &\mathrm{Im}\,(M) = \{MX,\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}, \\ &\mathrm{Sp}\,(M) \text{ le spectre de } M, \\ &E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}\,(M - \lambda I_n) \\ \text{et}\quad &\mathrm{Im}_\lambda(M) = \mathrm{Im}\,(M - \lambda I_n). \end{aligned}$$

Définitions :

- Soient $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $\mathbf{e} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
  on dit que $\mathbf{e}$ est un **vecteur propre commun** à A et B si :
  i) $\mathbf{e} \neq 0$;
  ii) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$;
  iii) il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $B\mathbf{e} = \mu\mathbf{e}$;

  On définit $[A,B] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par la formule : $[A,B] = AB - BA$.

- Soient f et g, deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$- espace vectoriel E et $\mathbf{e} \in E$;
  on dit de même que $\mathbf{e}$ est un **vecteur propre commun** à f et g si :
  i) $\mathbf{e} \neq 0$;
  ii) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(\mathbf{e}) = \lambda\mathbf{e}$;
  iii) il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $g(\mathbf{e}) = \mu\mathbf{e}$;

  On définit l'endomorphisme $[f,g]$ de E par la formule : $[f,g] = f \circ g - g \circ f$.

Partie I : ÉTUDE DANS UN CAS PARTICULIER

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ où $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note aussi $\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. On montre que $Sp(A) = \{1, -2\}, \omega_1 = 2, \omega_{-2} = 1$.

1. Que faut-il faire pour vérifier que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

2. Comment a-t-on justifié en utilisant la question précédente que A est diagonalisable ?

3. Montrer que $\mathrm{Im}_2(B) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_4)$ et que $\dim(E_2(B)) = 2$.

4. Comment faut-il montrer que C est semblable à la matrice D et déterminer le rang de C.

Partie II : ÉTUDE D'UN AUTRE CAS PARTICULIER

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{C}_{2n}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $2n$.
Pour $P \in E$, on désigne par P' le polynôme dérivé de P.

Pour tout polynôme P de E, on pose $f(P) = P'$ et $g(P) = X^{2n} P\left(\frac{1}{X}\right)$.
Soient $(a_0, a_1, \ldots, a_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n+1}$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$. On montre que $g(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$.

5. Montrer que g définit un endomorphisme de E.

6. Vérifier que si P est un vecteur propre de g, alors $\deg(P) \geqslant n$..

7. Montrer que X^n est vecteur propre de g.

8. Que faut-il vérifier pour montrer que X^{n+1} est un polynôme annulateur de f^i .

Problème 2

Notations.

Pour tout nombre réel x tel que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}\, dt$ converge, on note $\varphi(x)$ la valeur de cette intégrale.
Pour tout entier naturel non nul m tel que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^m}{t}\, dt$ converge, on désigne par J_m sa valeur.

1 Etude de la fonction φ.

On désigne par d la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $d(t) = t - 1 + \cos(t)$.

9. Etudier la fonction d ; en déduire qu'il existe un nombre réel α tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t} \leq \alpha$.
   On montre de même que $(*) \forall t > 0, 0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t^2} \leq \frac{1}{2}$.
10. Etablir la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, dt$. En déduire que $\varphi(x)$ existe pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$.
11. Après avoir montré que φ est décroissante, comment a-t-on justifié φ admet une limite finie λ en $+\infty$.
12. Déterminer la valeur de λ (on pourra utiliser (*)).
13. Dans cette question, on admet que φ est continue sur $[0, +\infty[$, $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et $\varphi'(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.
14. Déterminer la limite de $x \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
15. Expliciter une primitive de $x \mapsto \ln(1 + x^2)$
16. Expliciter $\varphi(x)$ pour x appartenant à $]0, +\infty[$.
17. Déterminer $\varphi(0)$.
18. Justifier l'existence de J_1 et établir une relation entre J_1 et $\varphi(0)$ (on pourra utiliser une intégration par parties, en remarquant que $(1 - \cos)' = \sin$).