

Interro sur Devoir Surveillé n°4
PSI
MATHEMATIQUES

Problème 1

Q1. Soit f une application de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et à valeurs dans \mathbb{R} . Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(xt) dt = 0$$

On note $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} dt$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Q2. Exprimer $J_n - J_{n-2}$ en fonction de n et en déduire :
$$\begin{cases} J_n - J_{n-2} = 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ J_n - J_{n-2} = \frac{2}{n-1} (-1)^{\frac{n}{2}-1} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Q3. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - J_{n-1}) = 0$ et en déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.

Q4. Déduire des résultats précédents l'égalité : $\pi = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Soit a un réel strictement positif. On admet l'existence de l'intégrale $\int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} dt$ pour $n \in \mathbb{N}$ puis que l'application f telle que $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, a[$.

Q5. Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t} dt - \int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} dt \right)$ lorsque $a \in]0, \pi[$.

Q6. En déduire la valeur de : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin(nt)}{t} dt$ lorsque $a = \frac{\pi}{2}$, $a < \frac{\pi}{2}$ et $a > \frac{\pi}{2}$.

Q7. En utilisant $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt$, montrer que l'application $\left[t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} \right]$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

Problème 2

Notations et définitions

- soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$;
- $\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} ; si $P \in \mathbb{R}[X]$, on notera encore P la fonction polynomiale associée ;
- $M_p(\mathbb{R})$ et $M_p(\mathbb{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices carrées de taille p à coefficients dans \mathbb{R} et dans \mathbb{C} , et $M_{p,q}(\mathbb{R})$ et $M_{p,q}(\mathbb{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans \mathbb{R} et dans \mathbb{C} ;

- on note I_p la matrice identité de $M_p(\mathbb{C})$ et 0_p la matrice de $M_p(\mathbb{C})$ ne comportant que des 0;
- on note χ_A le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in M_p(\mathbb{C})$, c'est-à-dire le polynôme $\det(XI_p - A)$;
- étant donnée une matrice $M \in M_p(\mathbb{C})$, on note $\text{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de M .

Partie I – Éléments propres d'une matrice

I.1 – Localisation des valeurs propres.

On considère une matrice $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$. Soient une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A et un vecteur propre associé $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}\}$.

On montre que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$.

Q8. Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_j|$. Montrer que : $|\lambda| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$.

En déduire que :

$$|\lambda| \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right\}.$$

Soient α et β deux nombres réels. On considère la matrice $A_n(\alpha, \beta) \in M_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_n(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $A_n(\alpha, \beta)$. On montre que

$$(*) |\lambda| \leq |\alpha| + 2|\beta|.$$

I.2 – Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$.

Q9. En utilisant (*), montrer que pour toute valeur propre λ de $A_n(0, 1)$, il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\lambda = 2 \cos(\theta)$.

On note U_n le polynôme $\chi_{A_n(0,1)}(2X)$. On montre que : $\forall n \geq 3, U_n = 2XU_{n-1} - U_{n-2}$

Q10. En déduire que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0, 1)$ est $\left\{ 2 \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right); j \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$. Déterminer la multiplicité des valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

Considérons $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et posons $\theta_j = \frac{j\pi}{n+1}$.

On montre que pour tout vecteur propre $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre $2 \cos(\theta_j)$, on a :

$$\begin{cases} -2 \cos(\theta_j)x_1 + x_2 = 0, \\ \forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, x_{k-1} - 2 \cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} = 0, \\ x_{n-1} - 2 \cos(\theta_j)x_n = 0. \end{cases}$$

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_{k-1} - 2 \cos(\theta_j)u_k + u_{k+1} = 0.$$

- Q11.** Montrer que E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} dont on précisera la dimension.
- Q12.** Déterminer l'ensemble des suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$.
- Q13.** En déduire l'espace propre de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre $2 \cos(\theta_j)$.
- Q14.** En déduire, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$ et les espaces propres associés. On distinguera le cas $\beta \neq 0$ du cas $\beta = 0$.