Nom :
Prénom :

Interrogation $n°3$
PSI
MATHEMATIQUES
(Jeudi 21 Décembre 2023)
(durée : 1h)

Question 1.

1. $\text{Vect}(1,0,0,1) + \text{Vect}(1,1,0,1) + \text{Vect}(0,1,0,0)$ est-elle une somme directe ? Justifier la réponse.
2. Montrer que $\text{Vect}(1,X) + \text{Vect}(X^2,X^3) + \text{Vect}(X^4+X^3)$ est une somme directe .

Question 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \{0..n\}$, on pose $f_k : x \mapsto \cos(kx)$.

1. Montrer que f_k est un vecteur propre de l'endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ défini par $D(f) = f''$.
2. En déduire, en citant la propriété adéquate que $(f_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille libre.

Question 3. La matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ?

Question 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Diagonaliser A.
3. En déduire (en citant la propriété adéquate) un polynôme annulateur de A de degré 2.
4. Donner tous les sev de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
5. Comment utilise-t-on la diagonalisation pour calculer A^n ?

Question 5. Donner deux méthodes différentes pour justifier qu'un projecteur p de E est diagonalisable.

Question 6.

1. Justifier rapidement que la matrice J dont tous les coefficients sont 1 est diagonalisable.
2. La diagonaliser.

Question 7. Dans chaque question, on donnera la forme du terme général de la suite réelle $(u_n)_n$ définie par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$.
2. $\forall n \geq 2, u_n + 2u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$.
3. $\forall n \geq 1, u_{n+1} + u_n + u_{n-1} = 0$.

Question 8. Décrire la méthode pour trouver la forme du terme général de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} - 2u_{n+3} - 9u_{n+2} + 2u_{n+1} + 8u_n = 0$$

On utilisera sans le redémontrer que le polynôme de la matrice utilisée est :
$\chi_A(X) = (X+1)(X-1)(X-4)(X+2)$

Question 9.

Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$ où $f_n : x \mapsto x^n$.

Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ où $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ où $f_n : x \mapsto x^n$ sur $]-1, 1]$ puis sur $[-a, a]$ où $a < 1$.

Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ où $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$.

Etudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ où $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$.